量子力学における可解性とその周縁に関する数理の研究

東京理科大学　理工学研究科
物理学専攻　修士課程　澤渡研究室
6219525　奈須田 祐大

指導教員： 澤渡 信之 准教授

2021 年 3 月

概 要

可解な量子力学系の研究は，量子力学の建設当初から行われている．しかしながら，その可解性についての本質的で統一的な描像は，未だに得られていない．量子力学の可解性は，しばしば，超対称性代数との関連で議論されてきた．可解な量子力学系を研究することは，超対称性の数理についての深い理解を与え，超対称場の理論における諸問題を解決し超対称性と関連する物理現象への知見を得るという意味でも重要である．本論文では，1 次元の量子力学系に対する Schrödinger 方程式の可解性について議論する．

量子力学の可解性における重要な概念として，形状不変性とよばれる一種の対称性があり，これをもつ系は必ず可解である．また，形状不変性をもつ系を変形することで，様々な可解系を構成する方法が提唱されてきた．適当な Darboux 変換を施すことで得られる多添字系や Krein–Adler 系などが，その例である．また，形状不変性をもつ系のうち，1980 年代までに見出されたものを，特に，古典的な形状不変系とよび，それ以降に発見されたものと区別することにする．本論文では，量子力学における可解性の統一的な理解を目標として，この形状不変性を機軸とした次のふたつの解析を行った：

A. 可解性の指標を定め，既知の可解系を新たな視点で捉え直した．

B. 可解系の手法を用いて，その周縁に存在する擬似可解な問題の解法を提唱し，数理構造を議論した．

ところで，当該分野においては，$\hbar = 1$ なる単位系での議論が一般的である．$\hbar$ の依存性を考慮した先行研究は存在するものの，その取り扱いには様々な誤謬が散見される．そこで，本論文では，その誤りを指摘した上で，我々の取り扱う全ての系に対して，その $\hbar$ 依存性を正しく明示することから議論を始めている．

A. では，形状不変性と深い関連があるとされてきた，SWKB 条件：

$$\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}\, \mathrm{d}x = n\pi\hbar\ , \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

に着目し，種々の可解系に対する解析を行った．扱った全ての可解系に対して，この条件は $\hbar$ に依存しないことが示された．即ち，この条件は，これまで考えられてきたような半古典近似とは独立な条件である，といえる．また，条件式の左辺の積分には，注目している可解系の準位構造が大きく寄与していることが見出された．この条件が古典的な形状不変系で厳密に成立する一方で，他の可解系では一般には厳密には成立しないことから，この積分量は，古典的な形状不変系との対比において，その系の情報を表していると考えられる．

B. では，古典的な形状不変系同士の重ね合わせで構成される擬似可解系に対する解析を行った．まず，この問題が実際の物理系に適用できることを，非相対論的な少数多体系として扱った重いバリオンの質量スペクトルの計算をすることによって示した．また，同じ函数形のポテンシャル問題の近似解を求めた先行研究の方法に対して，対数摂動論を用いた改良を試みた．更に，この系そのものの数理構造を理解するために，形状不変な系がもつ代数構造を手がかり

に，その代数構造を拡張し，系の代数的な構造を明らかにした．この構造を用いることで，系のエネルギースペクトルを，ある程度の近似の精度で求めることができる．

以上の解析から，本論文の結論は，次の 2 点である．第 1 に，SWKB 条件によって可解系の特徴，とりわけその系の準位構造と，対応する古典的な形状不変系の準位構造との差異に関する情報が得られることが分かり，これに基づいて種々の可解系を捉え直す視点が得られた．第 2 に，可解系の周縁に存在する 1 つの擬似可解系に対して，その可解／非可解の境界の様相を，代数的な意味において理解した．

以下では，本論文の構成を記す．まず，1 章では，導入として，本研究の背景や位置付けを述べる．2 章から 4 章には，本論文で必要な基本的な知識が纏められている．その中でも，2 章は全体の概論的な役割を果たしており，3 章では本研究において重要な概念である形状不変性の詳細な議論が与えられている．尚，3, 4 章では本論文で取り扱う可解系の導入を行っている．本論文の独自な研究は，主に 5 章と 6 章に書かれている．7 章が本論文の結論である．本論文の各章の関連は，図 0.1 の通りである．尚，いろいろの補足事項は，附録に書かれてある．

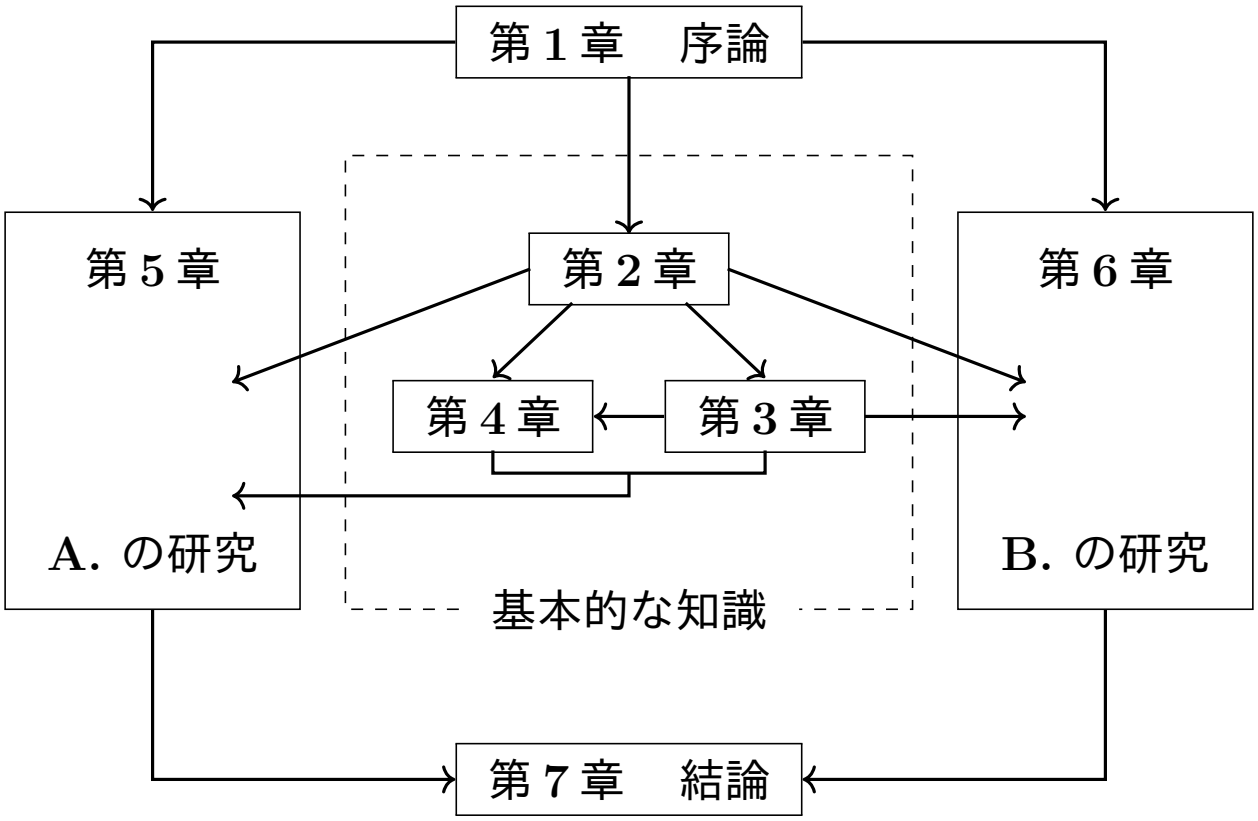


図 0.1　本論文の各章の関連．

目 次

概要 **i**

目次 **vi**

図目次 **viii**

表目次 **ix**

第 1 章　序論 **1**

1.1 背景 **1**

1.2 本研究の位置付けと方針 **4**

1.3 量子力学における超対称性 **5**

1.4 量子力学の復習 **7**

1.4.1 Schrödinger 方程式 **7**

1.4.2 1 次元調和振動子 **8**

第 2 章　解ける量子力学（超対称量子力学） **11**

2.1 問題設定 **11**

2.2 ハミルトニアンの因子化 **12**

2.2.1 ハミルトニアンの半正定値性 **12**

2.2.2 ハミルトニアンの因子化 **13**

2.2.3 パートナーのハミルトニアン **14**

2.2.4 絡み合わせ関係式と超対称性 **15**

2.3 解ける量子力学と Riccati の微分方程式 **17**

2.3.1 ハミルトニアンの因子化は常にできるのか？ **17**

2.3.2 最も簡単な例：1 次元調和振動子 **17**

2.3.3 超対称パートナーのポテンシャルと Riccati の微分方程式 **18**

2.4 Crum の定理 **19**

2.4.1 ハミルトニアンの逐次構成 **19**

2.4.2 Crum の定理 **20**

2.5 形状不変性 **21**

2.5.1 形状不変性の定義とその構造 **21**

2.5.2 可解性の中心的概念としての形状不変性 **23**

2.5.3 形状不変性と等価だと考えられてきた条件式 **24**

2.6 d 次元空間での中心力問題と N 体問題での“中心力問題” **24**

2.6.1 d 次元空間での中心力問題における解ける量子力学 **24**
2.6.2 N 体問題での“中心力問題”における解ける量子力学 **25**

第 3 章 形状不変性 **27**
3.1 一般論 **27**
3.2 例 **28**
3.2.1 1 次元調和振動子 **28**
3.2.2 動径振動子 **29**
3.2.3 Pöschl–Teller ポテンシャル **29**
3.2.4 その他の形状不変系 **30**
3.3 形状不変系の代数構造 **37**
3.3.1 一般論 **38**
3.3.2 軌道角運動量の代数構造と形状不変系 **40**
3.3.3 形状不変系の代数構造 **41**
3.4 新しい形状不変系たち **46**
3.4.1 乗算型の形状不変系 **46**
3.4.2 多添字系 **47**

第 4 章 新たな可解系たち **49**
4.1 一般的注意 **49**
4.2 Darboux 変換 **50**
4.2.1 Darboux 変換 **50**
4.2.2 多重 Darboux 変換 **51**
4.2.3 Darboux 変換によって構成される系 **51**
4.3 Krein–Adler 系 **52**
4.3.1 一般論 **52**
4.3.2 例 **53**
4.4 多添字系 **55**
4.4.1 一般論 **55**
4.4.2 例 **57**
4.4.3 擬仮想状態から構成される系 **59**
4.5 条件付き可解系 **59**
4.5.1 一般論 **59**
4.5.2 例 **61**
4.6 質量が位置に依存する場合の形状不変系 **64**
4.6.1 一般論 **64**
4.6.2 例 **65**

第 5 章 可解系と SWKB 条件 **67**
5.1 SWKB 条件 **67**
5.1.1 SWKB 条件 **67**
5.1.2 SWKB 条件の導出 **68**
5.2 古典的な形状不変系に対する SWKB 条件 **69**

5.3 種々の可解系に対する SWKB 条件 **71**
5.3.1 概観 **71**
5.3.2 質量が位置に依存する場合の形状不変系に対する SWKB 条件 **73**
5.3.3 多添字系に対する SWKB 条件 **75**
5.3.4 Krein–Adler 系に対する SWKB 条件 **82**
5.3.5 ここまでの解析から分かること **88**
5.4 条件付き可解系を用いた SWKB 条件の数理的解釈 **90**
5.4.1 動機 **90**
5.4.2 条件付き可解系に対する SWKB 条件 **92**
5.4.3 条件付き可解系を用いた SWKB 条件の解析 **94**
5.5 本章の結論 **102**

第 6 章 形状不変系の重ね合わせポテンシャル **103**
6.1 問題設定 **103**
6.1.1 x の冪から成る複合ポテンシャル **103**
6.1.2 スーパーポテンシャルの重ね合わせ **104**
6.2 「解ける量子力学」の枠組みの限界と S. Bera らによる処方 **105**
6.2.1 「解ける量子力学」の枠組みの限界 **105**
6.2.2 S. Bera らによる処方 **107**
6.3 物理的応用例 **108**
6.3.1 重いバリオンの質量スペクトル **108**
6.3.2 Hypercentral Constituent Quark Model **109**
6.3.3 重いバリオンの質量スペクトルの計算 **112**
6.3.4 重いバリオン系の確率密度の計算 **114**
6.4 S. Bera らの処方の評価と補正 **117**
6.4.1 定式化 **117**
6.4.2 具体例 **118**
6.5 式 (6.1) 型のポテンシャル問題の数理構造 **119**
6.5.1 代数の定義 **120**
6.5.2 エネルギースペクトルの計算 **120**
6.5.3 議論 **121**
6.6 本章の結論 **124**

第 7 章 結論 **125**

謝辞 **127**

附録 A 記号，定義，公式など **129**
A.1 ロンスキアン（Wronski 行列式） **129**
A.2 超幾何・合流型超幾何函数 **129**
A.2.1 超幾何函数 **129**
A.2.2 合流型超幾何函数 **130**
A.3 （古典）直交多項式 **130**
A.3.1 Hermite 多項式 **130**

A.3.2 Laguerre 多項式 131
A.3.3 Jacobi 多項式 131
A.4 積分公式 132
A.4.1 文献 [26] の積分公式 132
A.4.2 文献 [83] の積分公式 133
A.4.3 その他の積分公式 133

附録 B 古典的な形状不変系に対して SWKB 条件が厳密に成立することの証明 135
B.1 古典的な形状不変系に対して SWKB 条件が厳密に成立することの証明 135

附録 C 対数摂動論 141
C.1 導入 141
C.2 定式化 141
C.3 通常の摂動論との等価性 144
C.3.1 通常の摂動論が与える公式 144
C.3.2 等価性の確認 145

附録 D その他の可解系たち 147
D.1 準可解系 147
D.1.1 導入 147
D.1.2 一般論 147
D.2 Abraham–Moses 系 148
D.3 Natanzon 類のポテンシャル 148

附録 E 本文の補足事項 149
E.1 Schrödinger 方程式の“導出” 149
E.1.1 Hamilton–Jacobi の方程式からの“導出” 149
E.2 1 次元量子力学系にはエネルギーの縮退がないことの証明 152
E.3 Riccati の微分方程式の解法 152
E.4 N 体問題の取り扱いと超球面調和函数 153
E.4.1 Jacobi 相対座標系 153
E.4.2 超球面座標の導入 154
E.4.3 超球面調和函数 155

附録 F 量子力学における超対称性 157
F.1 円周上に束縛された自由粒子 157
F.2 Witten 模型 158

参考文献 161

図 目 次

0.1 本論文の各章の関連. ii

1.1 可解性に着目したときの量子力学系の分類. **4**
1.2 超多重項 (supermultiplet). **6**
1.3 量子力学における超対称性. **6**
1.4 1 次元調和振動子の固有状態と昇降演算子. **9**

2.1 量子力学における超対称性の構造. **16**
2.2 Crum の定理の状況. **21**
2.3 量子力学における超対称性の構造と形状不変性. **22**

3.1 形状不変系のスペクトル構造と演算子. **39**
3.2 軌道角運動量の代数構造をもつ形状不変系. **41**
3.3 形状不変系とその代数構造. **41**

4.1 $\hbar$ を陽に含んだ新たな可解系の定式化の手順. **50**

5.1 多添字系 (L) に対する SWKB 条件 (5.20) の計算結果. **79**
5.2 拡張動径振動子の系に対する SWKB 条件 (5.20) の計算結果. **80**
5.3 多添字系 (J) に対する SWKB 条件 (5.21) の計算結果. **81**
5.4 Krein–Adler 系 (H) のスーパーポテンシャル $W(x) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi^{(\mathrm{K,H})}_{\mathcal{D};0}(x)$ の 2 乗. . **83**
5.5 Krein–Adler 系 (H) に対する SWKB 条件 (5.25) の計算結果. **84**
5.6 Krein–Adler 系 (L) に対する SWKB 条件 (5.26) の計算結果. **86**
5.7 Krein–Adler 系 (J) に対する SWKB 条件 (5.27) の計算結果. **87**
5.8 準位構造の変化の例. **90**
5.9 条件を満たす b と β の領域（影のついた部分）. **92**
5.10 条件付き可解系 (H) に対する SWKB 条件 (5.30) の計算結果（その 1）. **93**
5.11 条件付き可解系 (H) に対する SWKB 条件 (5.30) の計算結果（その 2）. **94**
5.12 展開パラメータの最大値 (5.37) の計算結果. **97**
5.13 展開パラメータの最大値 (5.38) の計算結果. **97**
5.14 式 (5.33) の展開が可能な (b, β)-平面上の領域（影のついた部分）. **98**
5.15 $\beta = 0$ に固定したときの SWKB 積分 (5.39) の計算結果（$n = 1$）. **99**
5.16 SWKB 積分及びその展開式 (5.39) の計算結果. **99**
5.17 $b = 0$ に固定したときの SWKB 積分 (5.41) の計算結果（$n = 1$）. **100**
5.18 SWKB 積分及びその展開式 (5.41) の計算結果. **101**

6.1 座標のとり方. **110**

6.2 重いバリオン Σ_b^+ の質量スペクトル. **114**
6.3 ハイパー軌道角運動量の量子数 $\gamma \geqslant 1$ のときに生じるふたつのモード. **115**
6.4 重いバリオン Σ_b^+ の存在確率. **116**
6.5 S. Bera らの処方とそれに対する我々の補正よって計算されるエネルギー固有値（その 2). **119**
6.6 様々な ℓ に対する，式 (6.67) の近似の精度評価（その 1). **122**
6.7 様々な ℓ に対する，式 (6.67) の近似の精度評価（その 2). **123**

E.1 Jacobi 座標系. **154**

表 目 次

1.1 素粒子のスピンによる分類 **6**

2.1 形状不変性をもつ系のリスト（一部） **23**

5.1 多添字系の場合における誤差率 |Err| の最大値 **82**
5.2 Krein–Adler 系の場合における誤差率 |Err| の最大値 **88**
5.3 WKB 量子化条件と SWKB 条件との対応関係. **89**

6.1 構成子クォークの質量. **113**
6.2 S. Bera らの処方とそれに対する我々の補正よって計算されるエネルギー固有値（その 1）. **118**

第1章

序論

1.1 背景

量子力学の建設以来，Schrödinger[註1]方程式を厳密に解く手法が広く研究されてきた．その中でも特に，時間に依存しない1次元量子力学系の問題が様々論じられてきた．2階の常微分方程式であるSchrödinger方程式の解法として，ハミルトニアンの因子化に基づく手法がある．この因子化による解法は，E. Schrödingerが水素原子の問題を代数的に解くために考案し [1]，後にL. InfeldとT. Hullによって一般化された [2] 解法である．E. Schrödinger以前にも，P. M. Dirac [3] や，H. Weyl [4] による示唆があったとされる．

数学の常微分方程式論では，Riccatiの微分方程式とよばれる1階の非線形微分方程式が，対応する2階の線形常微分方程式と等価であるということが，E. Schrödingerによる因子化解法より前から知られていた．因子化解法は，このRiccatiのアイディアを量子力学の問題に焼き直したものであると理解できる．

他方，素粒子物理学においては，1960年代になって，Bose粒子とFermi粒子との入れ替えの対称性である超対称性（1.3節参照）が議論されるようになった．我々の宇宙では，実際には，超対称性は破れている．そのため，超対称場の理論において，超対称性の自発的破れの議論がなされていたが，これは非常に困難を極めていた．そこで，1980年代初めにE. Wittenによって，場の理論の形式から一旦離れ，低エネルギー領域での有効模型として，量子力学の範囲で超対称性を捉える試みが為された [5, 6]．この際に導入された模型を，超対称量子力学 (supersymmetric quantum mechanics; SUSY QM) とよぶ．尚，「量子力学の範囲での超対称性」とは，後述の通り，超対称性の代数構造をもった量子力学の問題を考えることを意味している．

超対称量子力学の研究が進むにつれ，超対称量子力学が，上述の因子化解法や可解なポテンシャル問題（ハミルトニアンの固有値問題）に関する様々な知見をもたらすことが分かってきた [7, 8, 9, 10, 11, 12]．特に因子化解法とは，本論文の主題のひとつである系の形状不変性 [13] という一種の対称性を通して，密接に関連している．量子力学の問題の解法に対する理解が深まることで，特定の問題が解けることの数理的構造が理解できたり，その知見に基づいた新たな可解系の構成法が確立されたりしている．このように，現在では，超対称量子力学は，超対称

[註1] 外国語の固有名詞を自国語で表記するのは，困難なことである．実際，かつて我が国では “Goethe” を「ギョーテ」や「ギョエテ」などとカタカナで表記していて，「ギョーテとは おれのことかと ゲーテ云い」などと揶揄されたこともあった．この川柳は，斎藤緑雨の作とされているが，正確なことは分かっていない．この脚註では，本論文における外国語の表記に対する姿勢を明らかにする．そもそも，外国語の発音を自国語の発音で再現することなど無理だし，無意味なことである．筆者は，外国語の固有名詞の表記は—特に人名はその者のアイデンティティにも関係しており—現地語そのままで表記するのが望ましいと考える．そこで本稿では，（入力の手間も考慮に入れて）人名のうち「漢字・ひらがな・カタカナ」で表されるものはそれらを用いて，そうでないものは原論文や原典の表記を極力忠実に従って表記することにする．人名以外に対しては，一般的に用いられるものと元の発音に可能な限り忠実なもの，それらの折衷案とを吟味して用いることにする．

性を理解するためのみならず，量子力学系の可解性に関する探求の手段としても広く研究されている．超対称量子力学のこの側面と共に，Schrödinger 方程式を解いたり，新たな可解系を構築したりする分野は，特に，解ける量子力学（厳密可解な量子力学；exactly solvable quantum mechanics）[14] とよばれている．厳密可解である（または単に，可解である）とは，ハミルトニアンの固有値問題に対して，その全ての固有値と，それに属する固有函数[註2]とが明示的に得られることをいう．他方，本論文において「解ける」という場合には，それらのうちの一部だけが明示的に得られていたり，また近似的な表式のみが得られていたりする場合も含まれることがある．前者の例としては，準可解系 [15, 16, 17, 18]（附録 D.1 参照）が挙げられる．

超対称量子力学は，ほかにも，Korteweg–de-Vries (KdV) 方程式やサイン–Gordon 方程式などで記述されるような力学系に対する洞察も与えてきた．これらの方程式の多ソリトン解を構成することは，それをポテンシャルにもつ Schrödinger 方程式と関係していることが知られている．また，逆に，ソリトン解に関する知見が，Schrödinger 方程式を解いたり，新たな可解系を構築したりすることに役立てられている．このように，量子力学における可解性の研究は，しばしば，超対称量子力学の文脈で行われてきた．

ここで，現在までに議論されてきた種々の可解系の概観を述べよう．

Coulomb ポテンシャルや調和振動子などは，量子論の発端となった現象の解析で現れるポテンシャルで，1920 年代の量子力学建設当初から知られていた可解系である．その後も，例えば 2 原子分子での原子間相互作用を記述する模型として提唱された Morse ポテンシャル [19] など，現象の解析に伴って様々な可解系が提唱されてきた．これらの系は，前述の因子化解法によって解かれるものである．1950 年頃までに，数十個の可解系に対して，因子化解法による統一的な理解がなされていた [2]．1981 年に超対称量子力学の模型が提唱されて以降，1983 年にはその超対称量子力学の文脈において形状不変性の概念が導入され [13]，因子化解法は，この形状不変性と数学の分野で知られている Crum の定理 [20] との組み合わせで理解されるようになった．尚，Crum の定理は，19 世紀から知られていた Darboux 変換 [21] とよばれるハミルトニアンの等スペクトル変形を基礎としている．

ところで，量子化条件は，前期量子論の時代から，人間が量子論を理解する上での“翻訳装置”として，重要な役割を果たしてきた．Borh–Sommerfeld の量子化条件や WKB 量子化条件などが知られているが，これらは調和振動子の問題など，ごく僅かの限られた問題に対して厳密なエネルギースペクトルを与えるものの，他の可解系に対してはエネルギースペクトルを求めるための近似公式に過ぎない．1985 年には，上述の形状不変性をもつ全ての系に対して厳密なエネルギースペクトルを与える量子化条件が提案された [22]．これは，しばしば，SWKB 量子化条件とよばれる．しかし，この条件の数理構造に対する理解はほとんどなく，様々な例に対する計算が為されてきたのみである [23, 24, 25, 26, 26, 27]．尚，以下で述べる新しく発見された可解系に対しては，エネルギースペクトルを求めるための近似公式に過ぎないことも分

[註2] 専門用語を日本語でどのように表記するか，という問題はあまり本質的ではない．また，その他の漢字表記も，本論文の内容と直接的には関係しない．ただ，本論文における漢字表記に対する姿勢を，この脚註で明らかにしておくことにする．例えば “function” の訳語の漢字表記について，元来「函数」と表記してきたものの，現在では「関数」の表記が多く用いられている．これは，所謂「常用漢字」の範囲内で漢字表記を行おう，との流れに従ったものである．常用漢字は“難しくない”のかもしれないが，これでは本来の単語の意味を充分に表しきれないだろう．“function” には，単に「関係する数」というだけでなく，“black box” といったニュアンスが感じられる．我々は，この奇妙な流れにのる必要もないだろう．また，まとまった文章を書く上で，漢字に対する正しい認識の下，より正確に筆者の意図を伝えることが肝要である．これらのことから，本稿では，常用漢字表への記載の有無に囚われず，漢字表記を行うこととする．そもそも，常用漢字表に囚われていては，筆者自身の名前を記載することもできなくなってしまう．

かっている [25].

1990 年代に入ってからも，形状不変性をもつ可解系が新たに発見されている．あるパラメータについての無限級数の形で定義される，乗算型形状不変性とよばれるもの [28] や，例外直交多項式系 [29, 30, 31] とよばれる，次数に欠落がある直交多項式系を固有函数の主要部にもつ量子力学系 [32, 33, 34] などが，その例である．特に後者について，この系は，Darboux 変換を用いることによって，既に知られていた可解系から構成されることが分かっている [35]．2010 年代に入ってからは，この理解に基づいて一般化された，多添字系とよばれる形状不変性をもつ可解系が構築された [36].

このように，Darboux 変換は，可解系を新たに構築することができるという点で重要である．Darboux 変換に基づいた Crum の定理を拡張することは，20 世紀の時点で，Krein [37] や Adle [38] によって既に為されていた．この Krein と Adler によるハミルトニアンの変形を施すことで，既知の可解系から新たな可解系を構築することができ，このような系を Krein–Adler 系とよぶことがある．

ここまでは，形状不変性と Darboux 変換を基礎として，可解系の理解ができる．しかしながら，以上の文脈とは異なる文脈で構成されてきた可解系も存在する．1971 年から議論され始めた Natanzon 類のポテンシャル [39, 40, 41]（附録 D.3 参照）が，その例である．Natanzon 類のポテンシャルの中には，形状不変性をもつものも存在するが，一般にはそうでない．また，既に知られている可解系を変形して新たな可解系を得る手法は，Darboux 変換を用いたもの以外にも，Abraham–Moses 変換 [42]（附録 D.2 参照）や量子力学における超対称性を応用したもの [43] など，他にも様々ある．これらの統一的な描像は未だに分かっておらず，また可解なポテンシャルの分類も完成していない．この問題は，当該分野において解決すべき重要な課題となっている．

そもそも，可解な模型の重要性は，次のようなところにある．可解な模型には，数値的にのみ解かれる模型と比べて，解析的な議論が可能で，そのために得られる情報が豊かにある．それ故，模型の性質を具体的に示して，自然現象の背後にある数理構造を明らかにすることが可能である．このように，自然現象は，その数理が明らかになって初めて，完全に理解できたといえる．しかし，実際の物理現象を記述するのは，厳密可解な問題よりも，可解でない（数値的にのみ解かれる）問題であることがほとんどである．可解な模型の性質をよく理解して，その手法を通して問題にアプローチし，現実の現象を捉えることは，自然現象の背後にある数理構造を明らかにするためには欠かせない方策であろう．尚，本論文において，このように可解系の手法によって近似的に解かれる問題は，擬似可解であるといい，可解系の周縁に存在する問題群であると捉える（図 1.1 参照）．また逆に，物理現象と可解系の手法との関係が明確になれば，その物理現象が可解性に対する直観を与えることも期待できる．

また，Schrödinger 方程式の解は，固有値問題の場合，その主要部に直交多項式を含む．直交多項式は，量子力学や物理学に限らず，生物学や情報科学，経済学などの諸分野でも現れてくる．その意味で，応用範囲は広い．数学的な一般論からだけではなく，量子力学の方法や概念によって統一的かつ直観的に捉えることで直交多項式の理解が深められる．更に，可解な量子力学系として構築された系の固有函数から，新たな直交多項式系が生み出されることもある．前述の多添字系などは，その例である．解ける量子力学の研究の意義は，このようなところにもある．

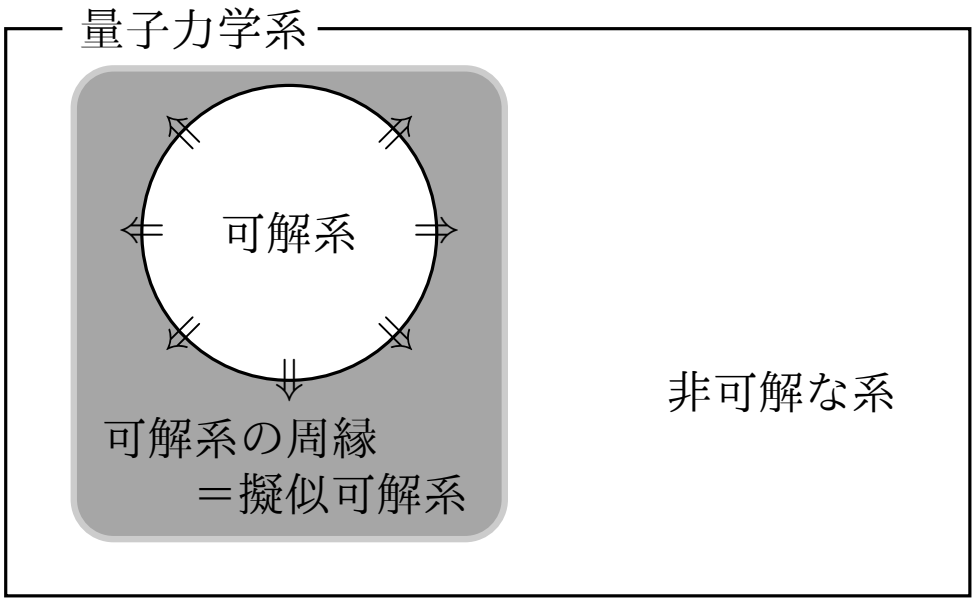


図 1.1　可解性に着目したときの量子力学系の分類．記号 “⇒” は，ここでは，「可解系の手法を用いて可解系の周縁に存在する問題へとアプローチする」ことを示している．

本節の最後に，超対称量子力学や量子力学の可解性の研究には，教育的な側面があることを述べておこう．学部レヴェルの量子力学の教科書に出てくるポテンシャル問題のほとんどは，超対称量子力学の枠組み，特に形状不変性を用いることで議論できる．また，「そもそも，量子力学の問題が解けるとはどういうことだろう？」という問いは量子力学を扱う研究者の関心事であるのみならず，その学習者が抱き得る疑問でもある．超対称量子力学や解ける量子力学は，この問いに，部分的に答えることができるものである．そのこともあって，最近では，入門レベルの量子力学の教科書の中にも超対称量子力学を扱っているものがある [44].

1.2　本研究の位置付けと方針

前節で述べたように，時間に依存しない 1 次元の量子力学系の問題に対する Schrödinger 方程式の可解性について，その本質的で統一的な描像やその起源は，部分的な理解はあるものの未だに解明されていない．これらを解決することは，解ける量子力学の分野において重要な課題である．本研究は，この課題に取り組むものである．

本研究で我々は，前述の形状不変性を機軸として，量子力学系の可解性に関する本質的で統一的な描像や起源の探索を行う．形状不変性をもたない可解系も知られており，形状不変性そのものが可解性の本質ではない．しかし，形状不変な系には我々にとって馴染みの深いものが多く含まれており，形状不変な系を変形したり，また形状不変な系と何らかの関係が付いている可解系は非常に多い．そこで我々は，形状不変性に着目し，それが可解性の中心的概念である，即ち（本質ではなくとも）重要な側面を反映している，との立場をとる．

前述の通り，Schrödinger 方程式の可解性に関する研究は，量子力学の建設当初から行われており，歴史は古い．そのために，また統一的理解の困難さから，様々な手法が乱立しているように見受けられる．そこで，さしあたり，我々は問題を精査・整理することから始める (A)．つ

まり，まず我々は，現代的な立場に立って当該分野の研究を俯瞰し，以下の手順で種々の可解系を捉え直す：

1. 種々の可解系を捉える際の指標を導入する（5.1, 5.2, 5.3.2 節）．
2. その指標に基づいて，種々の可解系の解析を行う（5.3, 5.4.2 節）．
3. 結果の解釈，また指標自体に対する理解を深める（5.3.5, 5.4 節）．

続いて，我々は，可解系の周縁に存在する問題に取り組む (B)．これには，次のような理由がある．しばしば，解ける量子力学の研究は，数学的厳密性を追求して，実際の物理現象から離れてしまうきらいがある．他方，実際の物理現象を記述する模型は，その非可解性のために数値的な計算に頼り過ぎているがために，数理的な構造の理解には至っていないことがある．この意味で，可解系の手法と，実際の物理現象を記述し得る模型との間には，幾分乖離がみられる．両者の“中間領域”に関する研究は，解ける量子力学の分野ではあまり行われてこなかった．このような，可解系の周縁に存在する問題についての理解が深まれば，可解／非可解の境界の様相が明らかとなり，可解性自体の外枠を画定することができることから，可解性の統一描像を得るという目標の達成に資する筈である．そこで，本論文では，その具体的な 1 つの場合に着目し，詳細な議論を行う．具体的には，

1. 解ける量子力学の手法を用いて近似的に解くことのできる，物理現象を記述し得る系を導入する（6.1, 6.2, 6.3 節），
2. この擬似可解系に対する解法を確立する（6.4 節），
3. その系にのもつ数理構造の理解を深める（6.5 節），

の 3 つを行う．

1.3 量子力学における超対称性

本論文の基礎には，超対称量子力学がある．量子力学における「超対称性」は，場の理論における超対称性とは意味合いが異なり，超対称性の代数構造を有するという意味である．本節では，場の理論での（元来の）超対称性と量子力学における超対称性との関連を，定性的に説明する．

超対称性 (supersymmetry; SUSY) は，もともと，Bose 粒子（ボゾン）と Fermi 粒子（フェルミオン）との入れ替えに関する対称性を意味する．ここで，Bose 粒子は整数スピンをもち Bose–Einstein 統計に従い，Fermi 粒子は半奇数のスピンをもち Fermi–Dirac 統計に従う粒子である．スピンに着目して素粒子を分類すると，表 1.1 のようになる．場の理論において，両者の入れ替えは，超電荷 (supercharge) $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ によって実現される．$\mathcal{Q}$ が Fermi 粒子を Bose 粒子に，$\mathcal{Q}^\dagger$ が Bose 粒子を Fermi 粒子に，それぞれ変える．このとき，Bose 粒子と Fermi 粒子とは，超多重項 (supermultiplet) をなす（図 1.2 参照）．

表 1.1　素粒子のスピンによる分類

スピン	粒子名	素粒子の例	支配方程式	自然界での役割
0	スカラー粒子	Higgs 粒子	Klein–Gordon 方程式	質量の起源
$\frac{1}{2}$	Dirac 粒子	クォーク・レプトン	Dirac 方程式	物質の起源
1	ゲージ粒子	ゲージボソン （光子・ウィークボソン・グルーオン）	Maxwell 方程式 Proca 方程式	力の起源
$\frac{3}{2}$	—	グラビティーノ	Rarita–Schwinger 方程式	暗黒物質？
2	—	重力子	Einstein 方程式	時空の起源

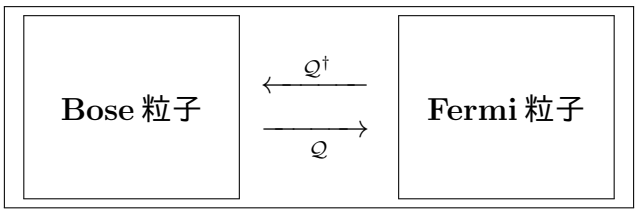


図 1.2　超多重項 (supermultiplet).

他方，量子力学においては，既に述べたように，上述の意味での「超対称性」は存在しない．このことは，量子力学で定義される超電荷がスピンの量子数を変えないことから分かる．しかしながら，量子力学においても，場の理論と同様の縮退構造を考えることができる（図 1.3 参照）．この縮退構造こそが，超対称性の代数構造をもつ系の重要な性質のひとつであり，量子力学における超対称性とは，この縮退構造をもつこと—これは全く一般的な 1 次元量子力学系の構造である—をいう．

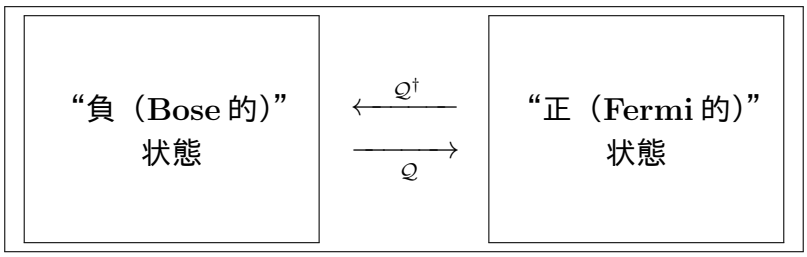


図 1.3　量子力学における超対称性.

尚，量子力学における超対称性の数学的な議論は，本論文の主題とは逸れるものの，基礎をなす重要な概念であることに変わりないので，附録 F で行うことにする．

1.4 量子力学の復習

ここでは，量子力学の中でも，本論文の主題と関連の深い事項を簡単に復習する．本論文では Schrödinger 方程式の可解性を議論してゆくのであるから，まず 1.4.1 節で，Schrödinger 方程式について記す．続いて 1.4.2 節では，1 次元調和振動子の演算子解法について述べる．これは，本論文の基礎にある超対称量子力学が，1 次元調和振動子の演算子解法を一般化したものである，との見方ができるためである．量子力学の基本的な事柄のうち，これら以外の事項は，適宜，文献 [45, 46, 47, 48] などの教科書を参照されたい．

1.4.1 Schrödinger 方程式

3 次元の時間に依存する Schrödinger 方程式 (Schrödinger equation) は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t)=\mathcal{H}\Psi(\boldsymbol{r},t)\ ,\quad \mathcal{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V(\boldsymbol{r}) \tag{1.1}$$

と書かれる偏微分方程式である．この偏微分方程式の解として，$\Psi(\boldsymbol{r},t)\equiv f(t)\psi(\boldsymbol{r})$ なる変数分離形を仮定すると，

$$\frac{\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}}{f(t)}=\frac{\mathcal{H}\psi(\boldsymbol{r})}{\psi(\boldsymbol{r})}=\text{const.}\equiv E$$

となり，2 つの常微分方程式：

$$\begin{cases}\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=Ef(t)\ , & \text{(1.2a)}\\ \mathcal{H}\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r})\ , & \text{(1.2b)}\end{cases}$$

に分けられる．式 (1.2a) より，系の時間依存性は，

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t} \tag{1.3}$$

と分かるので，問題は，式 (1.2b) を解くことに帰着される．式 (1.2b) は，時間依存しない Schrödinger 方程式，または定常状態の（静的な；static）Schrödinger 方程式とよばれる．

特に，1 次元の量子力学系に対しては，式 (1.2b) において $\boldsymbol{r}\to x$ とした

$$\mathcal{H}\psi(x)=E\psi(x)\ ,\quad \mathcal{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x) \tag{1.4}$$

を解くことになる．

我々が興味をもっているのは，束縛状態 (bound state) である．束縛状態とは，粒子が空間の限られた範囲に存在している状態のことをいい，$|\boldsymbol{r}|\to\infty$ で $\psi(\boldsymbol{r})\to 0$（1 次元なら，$|x|\to\infty$ で $\psi(x)\to 0$）となっている．束縛状態では，エネルギーが離散的な値のみをとることになり，このとき式 (1.2b) はハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値方程式になっている．つまり，量子力学の問題を解くことは，結局，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値問題を解くことに帰着される．また，あるエネルギー固有値に属する固有函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ について，そのノルムは有限になる：

$$(\psi(\boldsymbol{r}),\psi(\boldsymbol{r}))\coloneqq\int|\psi(\boldsymbol{r})|^2\ \mathrm{d}^3r<\infty\ . \tag{1.5}$$

このとき，固有函数は 2 乗可積分 (square-integrable) であるという．波動函数には，一般に，定数倍の任意性がある．この定数を，式 (1.5) の積分の値が 1 となるように適当に採ることにすれば，$|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ は，粒子が $\boldsymbol{r}$ の位置に見出されることの確率密度を与える．

他方，束縛状態でない場合，$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ で $\psi(\boldsymbol{r}) \to 0$ とはならず，エネルギーは，離散的な値に限られず連続スペクトルになる．このとき，波動函数は 2 乗可積分でない．これは系の無限遠への運動に対応し，散乱問題等で現れる．

1.4.2 1 次元調和振動子

1 次元調和振動子に対する Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{HO}}\psi(x) = E\psi(x)\ , \quad \mathcal{H}_{\mathrm{HO}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1.6}$$

と書かれる．ただし，$x \to \pm\infty$ で $\psi(x) \to 0$ となる．この固有値問題に対する解は，

$$\text{固有値：} \qquad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\ , \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \tag{1.7}$$

$$\text{固有函数：} \qquad \psi_n(x) = \mathcal{N}_n \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{1.8}$$

である．$\mathcal{N}_n$ は規格化定数で，

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1.9}$$

である．また，H_n は n 次の Hermite 多項式（附録 A.3.1 参照）を表している．

ここで，ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{HO}}$ を（部分的に）因子化することを考える：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{HO}} &= \hbar\omega\left\{\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right] + \frac{1}{2}\right\} \\ &\equiv \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\ .\end{aligned} \tag{1.10}$$

$\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ，昇演算子，降演算子とよばれる．力学変数の $\hat{x}$ と $\hat{p}$ とは，これらの昇降演算子を用いて，

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\ , \tag{1.11}$$

$$\hat{p} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right) \tag{1.12}$$

と書かれる．また，数演算子 $\hat{n}$ を

$$\hat{n} \coloneqq \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{1.13}$$

で定義すると，$\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}$ は，交換関係：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1\ , \quad [\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\ , \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}\ , \tag{1.14}$$

が成り立つ．これらの交換関係を用いれば，昇降演算子を固有函数に作用させると，

$$\hat{a}\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x)\ , \quad \hat{a}\psi_0(x) = 0\ , \tag{1.15}$$

$$\hat{a}^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x) \tag{1.16}$$

となることが分かる．即ち，昇降演算子は，量子数 n を上げ下げする働きがある．この状況を示したのが，図 1.4 である．また，数演算子 $\hat{n}$ の固有値は，n である：

$$\hat{n}\psi_n(x) = \hat{a}^\dagger\hat{a}\psi_n(x) = \sqrt{n}\hat{a}^\dagger\psi_{n-1}(x) = n\psi_n(x)\ . \tag{1.17}$$

以上から，昇降演算子を用いて，1 次元調和振動子の固有値問題 (1.6) を解くことができる．固有値は，ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\rm HO}$ が

$$\mathcal{H}_{\rm HO} \equiv \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)$$

と書かれることから，すぐに

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1.18}$$

と分かる．他方，固有函数は，(1.15) の第 2 式の微分方程式を解くことにより，まず初めに，基底状態波動函数：

$$\psi_0(x) = \mathcal{N}_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\ , \tag{1.19}$$

が求まり，昇演算子を繰り返し作用させること (1.16) により，

$$\psi_n(x) = \mathcal{N}_n\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1}\psi_0(x) = \mathcal{N}_n \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{1.20}$$

と求まる．

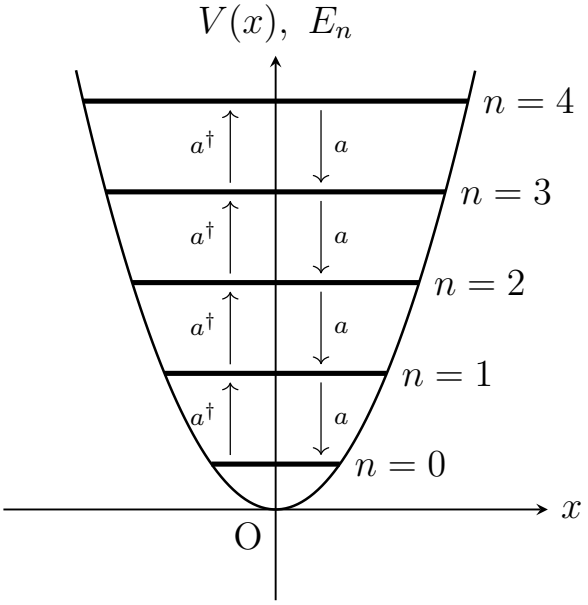


図 1.4　1 次元調和振動子の固有状態と昇降演算子.

第2章

解ける量子力学（超対称量子力学）

本章では，解ける量子力学（超対称量子力学）の解説を行う．本章から 4 章には，本論文に必要な基本的な知識が纏められているが，特に本章は，その中でも中心的な章であり，3 章以降に対する概論的な役割を果たす．

本章の構成は以下の通り．まず，2.1 節で問題設定を述べた後に，2.2, 2.3 節では，解ける量子力学や超対称量子力学において，最も重要な考え方のひとつである，ハミルトニアンの因子化ついて説明する．続いて，2.4 節では，ハミルトニアンの因子化の議論を応用し，（可解な）1 次元量子力学系の一般的な構造を述べる．この構造を実現する例のひとつに，2.5 節で導入する形状不変性とよばれる対称性をもつ系がある．この話題は，本論文の主題のひとつであり，3 章でより詳細な解説を行う．本章の議論は 1 次元の問題に限定されているが，本章の最後の 2.6 節では，一般の d 次元の問題などとの関連を示す．

尚，解ける量子力学や超対称量子力学を扱った教科書には，文献 [8, 9, 10, 11, 49, 50] などがある．

2.1 問題設定

1 次元量子力学系のハミルトニアン：

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \ , \quad x \in (x_1, x_2) \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$\hat{p}$ は座標 x に共軛な運動量で，$\hat{p} = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ であり，$V(x)$ はポテンシャルである．ポテンシャル $V(x)$ は，下に有界とし，x_1, x_2 は無限大になるか，あるいは x_1, x_2 が有限ならその点で $V(x) \to \infty$ である．

式 (2.1) で与えられた系に対して，時間に依存しない Schrödinger 方程式：

$$\mathcal{H}\psi(x) = E\psi(x) \tag{2.2}$$

を解くことは，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値問題：

$$\mathcal{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \ , \tag{2.3}$$

を解くことである[註3]．エネルギー固有値の番号付け n は，（常に,）単調増加：

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$$

[註3] 量子力学における固有値問題と線型代数，特に Hermite 行列の固有値問題との間には，類似性があるように

とする[註4]．また，固有函数 $\psi_n(x)$ は，互いに直交する（h_n は有限の値をとる）：

$$(\psi_n(x), \psi_m(x)) \coloneqq \int_{x_1}^{x_2} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\ \mathrm{d}x = h_n\delta_{n,m}\ . \tag{2.4}$$

以下では，簡単のため，$2m = 1$ とする．

2.2 ハミルトニアンの因子化

2.2.1 ハミルトニアンの半正定値性

基底状態のエネルギー固有値は，ハミルトニアン，つまりはポテンシャルに適当な定数を加えることで，固有函数の形を変えることなく，常にゼロにできる．そのため，(2.1) の固有値問題を解くことは，

$$\widetilde{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - E_0 = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) - E_0 = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \widetilde{V}(x)$$

の固有値問題：

$$\widetilde{\mathcal{H}}\psi_n(x) = \mathcal{E}_n\psi_n(x)\ , \quad \mathcal{E}_0 = 0 \tag{2.5}$$

を解くことと本質的に同じことである．最低固有値がゼロとなるとき，ハミルトニアンは半正定値 (positive semi-definite) であるという．以降，エネルギー固有値に適当な定数を加えて（このことを定数分シフトさせると表現することがある）基底状態のエネルギー固有値をゼロにとった場合，その値を $\mathcal{E}$ のようにカリグラフィ体の E で表すことにする．

ここで，基底状態 $(n = 0)$ を考えてみる．式 (2.5) は，

$$-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2\psi_0(x)}{\mathrm{d}x^2} + \widetilde{V}(x)\psi_0(x) = 0 \tag{2.6}$$

となるから，このとき，ポテンシャル $\widetilde{V}(x)$ は，

$$\widetilde{V}(x) = \hbar^2\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \tag{2.7}$$

と書かれる．ただし，記号 $''$ は x についての 2 階導函数を表している．この式から，基底状態の波動函数 $\psi_0(x)$ からポテンシャルを構成することができる，ということが分かる．

以下では，式が煩雑になることを避けるために，$\widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$, $\widetilde{V}(x) \to V(x)$ と書くことにする．つまり，以下で出てくるハミルトニアン $\mathcal{H}$ は，特に断りがない限りは常に，半正定値化されているものとする．

思われる：

量子力学：
$$\mathcal{H}\psi(x) = E\psi(x)\ ,$$
自己共軛性 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger\ , \quad (\phi,\psi) \coloneqq \int \phi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x\ , \quad (\phi, \mathcal{H}\psi) = (\mathcal{H}\phi, \psi)\ ,$

Hermite 行列：
$$\mathsf{H}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \text{or} \quad \sum_j H_{ij}v_j = \lambda v_i\ ,$$
Hermite 性 $H_{ij} = H_{ji}^*\ , \quad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \coloneqq \sum_j u_j^*v_j\ , \quad (\boldsymbol{u}, \mathsf{H}\boldsymbol{v}) = (\mathsf{H}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\ .$

[註4] 1 次元量子力学系においては，エネルギー固有値の縮退はない（E.2 節参照）．

2.2.2 ハミルトニアンの因子化

線型代数において，次の定理が知られている [51]：

定理．任意の n 次複素行列 P に対して，$\mathsf{P}^*\mathsf{P}$ は半正定値である．逆に，任意の半正定値の Hermite 行列 A は，$\mathsf{A} = \mathsf{P}^*\mathsf{P}$ の形に表される．

これと同様に，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ も，ある演算子 $\mathcal{A}$ とその Hermite 共軛な演算子との積で，$\mathcal{H} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ とすることができる．ただし，$\mathcal{A}$ は一意ではなく，ユニタリ変換：$\mathcal{A} \to U\mathcal{A}$，の自由度がある．

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \\ &\equiv \left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right) \equiv \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\end{aligned} \tag{2.8}$$

と因子化することを考える[註5]．ここで，$W(x)$ はスーパーポテンシャル (superpotential) である．スーパーポテンシャル $W(x)$ を用いれば，ポテンシャル $V(x)$ は，

$$V(x) = W(x)^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.9}$$

と書かれる．

また，前小節と同様に，基底状態 $(n = 0)$ を考えると，

$$\mathcal{H}\psi_0(x) = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\psi_0(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{A}\psi_0(x) = 0 \text{ [註6]},$$

$$\therefore \quad \left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right)\psi_0(x) = 0 \tag{2.10}$$

[註5] 因子化の仕方及びスーパーポテンシャル $W(x)$ の定義の仕方には，本文中に示したもの以外にも，様々な流儀がある．例えば，[49] では，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を（我々が採用している単位系の下では）

$$\mathcal{H} = \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\right)\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

と因子化し，この $W(x)$ を超ポテンシャル (superpotential) とよんでいる．他方，[50] では，

$$\mathcal{H} = \hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

と因子化し，$w(x)$ は基底状態波動函数の対数をとったもので，プレポテンシャル (prepotential) とよんでいる．前者の方法は，超場形式の超対称性理論の定式化からは自然な方法である．また，後者の方法では，基底状態波動函数の正値性が自明に分かる，という利点がある．

[註6] 証明は以下の通り：
$\Longleftarrow$) $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\psi_0(x) = \mathcal{A}^\dagger 0 = 0$ は自明．
$\Longrightarrow$) $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\psi_0(x) = 0$ の両辺に（左から）$\psi_0(x)^\dagger$ を掛けると，

$$\psi_0(x)^\dagger\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\psi_0(x) = \left(\mathcal{A}\psi_0(x)\right)^\dagger\mathcal{A}\psi_0(x) = \|\mathcal{A}\psi_0(x)\|^2 = 0$$

となるので，$\mathcal{A}\psi_0(x) = 0$.

である．このとき，$\psi_0(x)$ は $\mathcal{A}$ のゼロモードであるという．基底状態波動函数 $\psi_0(x)$ は，$\mathcal{A}$ のゼロモードとして 1 階の微分方程式 (2.10) によって決定される（$\mathcal{N}$ は規格化定数である）：

$$\psi_0(x) = \mathcal{N} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int^x W(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\right] . \tag{2.11}$$

逆に，式 (2.10) を用いれば，基底状態波動函数 $\psi_0(x)$ でスーパーポテンシャルを

$$W(x) = -\hbar\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} = -\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0(x) \tag{2.12}$$

と書き下すこともできる．ただし，記号 $'$ は x についての 1 階導函数を表している．更に，ポテンシャル $V(x)$ を，次のように基底状態波動函数 $\psi_0(x)$ で書き下すこともできる：

$$V(x) = \hbar^2\left[\left(\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}\right] = \hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\psi_0(x)\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\psi_0(x)\right] . \tag{2.13}$$

尚，これは，式 (2.7) を書き換えたものになっている．

他方，$\mathcal{A}^\dagger$ のゼロモードは，$\mathcal{A}$ のゼロモードの逆数である：

$$\mathcal{A}^\dagger\psi_0(x)^{-1} = 0 , \quad \psi_0^{-1}(x) \propto \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int^x W(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}\right] . \tag{2.14}$$

2.2.3 パートナーのハミルトニアン

ここで，

$$\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{H} = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \equiv -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_-(x) \tag{2.15}$$

と書くことにする．それに伴って，固有値や固有函数も

$$\mathcal{H}_-\psi_n^{(-)}(x) = \mathcal{E}_n^{(-)}\psi_n^{(-)}(x) \tag{2.16}$$

などと書くことにする．$\mathcal{H}_-$ に対して，$\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger$ の順序を入れ替えた新たなハミルトニアン $\mathcal{H}_+$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_+ \coloneqq \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger &= -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} \\ &\equiv -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_+(x)\end{aligned} \tag{2.17}$$

と定義する．これらふたつのハミルトニアン $\mathcal{H}_\pm$（または，ポテンシャル $V_\pm(x)$）は，互いに超対称パートナー (SUSY partners) であるという．また，$\mathcal{H}_+$ を $\mathcal{H}_-$ の随伴 (associated) ハミルトニアンということもある．両者は，

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_- + 2\hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = \mathcal{H}_- - 2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\psi_0^{(-)}(x) \tag{2.18}$$

の関係にある．

ハミルトニアン $\mathcal{H}_+$ に対する Schrödinger 方程式（固有値方程式）は，

$$\mathcal{H}_+\psi_n^{(+)}(x) = \mathcal{E}_n^{(+)}\psi_n^{(+)}(x) \tag{2.19}$$

と書かれる．

2.2.4　絡み合わせ関係式と超対称性

$\mathcal{H}_\pm$ と $\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger$ との間には，

$$\mathcal{A}\mathcal{H}_- = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{H}_+\mathcal{A} \ , \quad \mathcal{A}^\dagger\mathcal{H}_+ = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{H}_-\mathcal{A}^\dagger \tag{2.20}$$

なる関係がある．これらは，絡み合わせ関係式 (intertwining relations) とよばれている．

この関係式を用いれば，$\mathcal{H}_-$ の固有状態 $\{\mathcal{E}_n^{(-)}, \psi_n^{(-)}(x)\}$ から $\mathcal{H}_+$ の固有状態 $\{\mathcal{E}_n^{(+)}, \psi_n^{(+)}(x)\}$ を知ることができる．式 (2.16) に左から演算子 $\mathcal{A}$ を作用させ，(2.20) 第 1 式を用いると，

$$\mathcal{A}\mathcal{H}_-\psi_n^{(-)}(x) = \mathcal{E}_n^{(-)}\mathcal{A}\psi_n^{(-)}(x) = \mathcal{H}_+\mathcal{A}\psi_n^{(-)}(x) \tag{2.21}$$

となる．よって，$\mathcal{A}\psi_n^{(-)}(x)$ は，固有値 $\mathcal{E}_n^{(-)}$ に属する $\mathcal{H}_+$ の固有函数であることが分かる．ただし，$n = 0$ に対しては，式 (2.10) より $\mathcal{A}\psi_0^{(-)}(x) = 0$ なので，そのような状態は存在しない．従って，$\mathcal{A}\psi_n^{(-)}(x)$ が $\mathcal{H}_+$ の固有函数となるのは，$n \geqslant 1$ の場合である．

他方，式 (2.19) に左から演算子 $\mathcal{A}^\dagger$ を作用させ，(2.20) 第 2 式を用いると，

$$\mathcal{A}^\dagger\mathcal{H}_+\psi_n^{(+)}(x) = \mathcal{E}_n^{(+)}\mathcal{A}^\dagger\psi_n^{(+)}(x) = \mathcal{H}_-\mathcal{A}^\dagger\psi_n^{(+)}(x) \tag{2.22}$$

を得る．この式からは，全ての n に対して，$\mathcal{A}^\dagger\psi_n^{(+)}(x)$ が，固有値 $\mathcal{E}_n^{(+)}$ に属する $\mathcal{H}_-$ の固有函数であることが分かる．

以上から，$\mathcal{H}_+$ の固有状態 $\{\mathcal{E}_n^{(+)}, \psi_n^{(+)}(x)\}$ について，次のことが分かる：

(i) 固有値に対して，

$$\mathcal{E}_n^{(+)} = \mathcal{E}_{n+1}^{(-)} \equiv \mathcal{E}_{n+1} \ , \quad \mathcal{E}_0^{(-)} \equiv \mathcal{E}_0 = 0 \tag{2.23}$$

である．

(ii) $\mathcal{H}_+$ の固有函数 $\psi_+(x)$ は，

$$\psi_n^{(+)}(x) = \mathcal{A}\psi_{n+1}^{(-)}(x) = \frac{\mathrm{W}\left[\psi_0^{(-)}, \psi_{n+1}^{(-)}\right](x)}{\psi_0^{(-)}(x)} \tag{2.24}$$

とできる．ただし，W は，ロンスキアンを表す（附録 A.1 参照）．

(iii) 式 (2.24) のとき，逆に，$\mathcal{H}_-$ の固有函数 $\psi_-(x)$ は，適当な係数 $1/\mathcal{E}_{n+1}$ を掛けて，

$$\psi_{n+1}^{(-)}(x) = \frac{1}{\mathcal{E}_{n+1}}\mathcal{A}^\dagger\psi_n^{(+)}(x) \ . \tag{2.25}$$

である．

これらから，$\mathcal{H}_- \leftrightarrow \mathcal{H}_+$ の変換について，次の解釈ができる：

(i) $\mathcal{H}_\pm$ は，$\mathcal{E}_0 = 0$ を除いて，等スペクトルである．また，両者のエネルギー固有値が，$\mathcal{H}_-$ の基底状態を除いて，縮退している，ともいえる．

(ii) $n \geqslant 1$ に対しては，演算子 $\mathcal{A}$ は，$\mathcal{H}_-$ の固有函数 $\psi_n^{(-)}(x)$ を $\mathcal{H}_+$ の固有函数 $\psi_n^{(+)}(x)$ に写すと同時に，固有函数のノードを減らすはたらきをする．$n = 0$ に対しては，演算子 $\mathcal{A}$ は，状態 $\psi_0^{(-)}(x)$ を削除する (delete) はたらきをする．

(iii) 演算子 $\mathcal{A}^\dagger$ は $\mathcal{H}_+$ の固有函数 $\psi_n^{(+)}(x)$ を $\mathcal{H}_-$ の固有函数 $\psi_n^{(-)}(x)$ に変換すると同時に，固有函数のノードを増やすはたらきをする．

以上の (i)–(iii) を用いれば，$\mathcal{H}_-$ のエネルギー固有値と固有函数が全て求まっているとき，超対称パートナー $\mathcal{H}_+$ のエネルギー固有値と波動函数も求めることができる．式 (2.24) より，固有函数系 $\{\psi_n^{(+)}(x)\}$ のノルムに関して，

$$\big(\psi_n^{(+)}, \psi_m^{(+)}\big) = \mathcal{E}_{n+1}\big(\psi_{n+1}^{(-)}, \psi_{m+1}^{(-)}\big) \tag{2.26}$$

が成り立つ．

(i)–(iii) の内容を図で表すと，図 2.1 のようになる．図 2.1 に示された縮退の構造は，超対称性をもつ系の縮退構造と同様のものであり，この縮退構造が，量子力学における超対称性の現れである[註7]．1.3 節で述べたように，ここでいう「超対称性」は，超対称性代数（式 (F.12) 参照）をもつという意味であって，Bose 粒子と Fermi 粒子との入れ替えを意味しない．以上のことを踏まえて，$\mathcal{H}_- \leftrightarrow \mathcal{H}_+$ の変換は，超対称変換（SUSY 変換）とよばれることも，また単に Darboux–Crum 変換とよばれることもある．

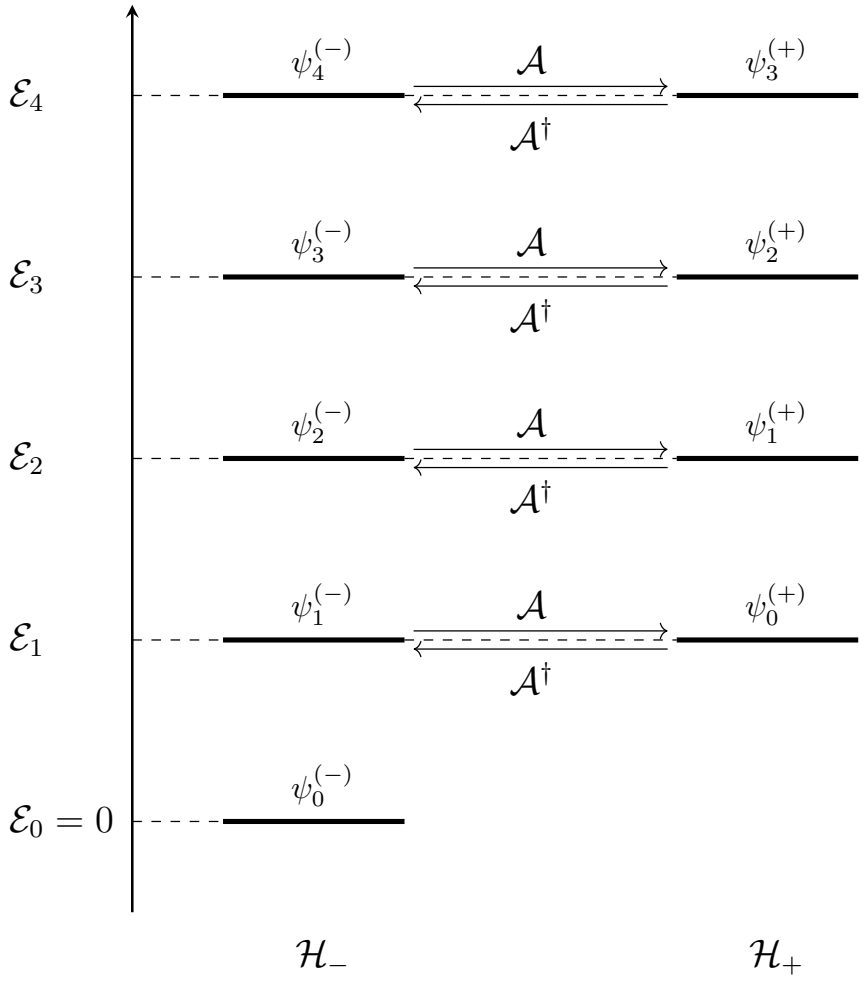


図 2.1　量子力学における超対称性の構造．

[註7] 量子力学における超対称性の構造だけを考えるのであれば，もっとも簡単な例は，円周上に束縛された自由粒子であろう．しかし，本章は量子力学系の可解性の構造に興味があるので，ここでは触れない．円周上に束縛された自由粒子の議論は，附録 F.1 にある．

2.3 解ける量子力学と Riccati の微分方程式

2.3.1 ハミルトニアンの因子化は常にできるのか？

半正定値の Hermite 演算子が，ある演算子とその Hermite 共軛な演算子との積で表されることは，数学上の定理である．従って，原理的には，どの（1 次元量子力学系の）ハミルトニアンも因子化され得る．しかし実際には，演算子が（実質的には，スーパーポテンシャルが）我々の知っている初等函数や特殊函数，または演算で書き下せない場合には，因子化できない．つまり，あるハミルトニアンが与えられても，そのハミルトニアンが常に解析的に因子化できるとは限らない．

前節の議論から，基底状態波動函数が分かれば，その系のハミルトニアンは常に因子化できる，といえる：

$$\mathcal{H} = \hbar^2 \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0(x) \right) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0(x) \right) .$$

従って，可解な 1 次元量子力学系に対しては，常にそのハミルトニアンは因子化できるのである．逆に，ハミルトニアンが因子化できれば，式 (2.11) によって，系の基底状態波動函数が（少なくとも形式的には）求められる．

では，ハミルトニアン（あるいはポテンシャル）が与えられたとき，そのハミルトニアンが解析的に因子化できるか否かはどのように考えたら良いのだろうか．この問題は，結局，ポテンシャル $V(x)$ からスーパーポテンシャル $W(x)$ を求める問題であるから，$W(x)$ についての 1 階の微分方程式 (2.9) を解くことに帰着される．この微分方程式は，Riccati の微分方程式とよばれている，よく知られた型の微分方程式である（附録 E.3 参照）．Riccati の微分方程式には，一般解が知られていない．しかし，変数変換などによって可解な微分方程式に帰着する場合も存在する．従って，Riccati の微分方程式 (2.9) が解ける場合にはハミルトニアンは因子化でき，解けない場合には解析的に因子化できない，ということになる．つまり，ハミルトニアンが常には解析的に因子化されないのは，Riccati の微分方程式に一般解がないためである．

このように，ハミルトニアンの因子化の問題は，Riccati の微分方程式と深く関係している．更に，誤解を恐れずにいえば，解ける量子力学の諸問題は，ハミルトニアンが解析的に因子化されるか否かの問題で，数学的には Riccati の微分方程式が解析的に解かれるかの問題である．

2.3.2 最も簡単な例：1 次元調和振動子

本小節では，式 (2.9) の Riccati の微分方程式が解けてハミルトニアンが解析的に因子化できる場合の，最も簡単な例として，1 次元調和振動子の問題をみてゆくことにする．本小節において，記号 $'$ は，常に x についての 1 階導函数を示すものとする．

$$V(x) = \omega^2 x^2 - \hbar\omega$$

とすると，式 (2.9) は，

$$W^2(x) - \hbar W'(x) = \omega^2 x^2 - \hbar\omega \tag{2.27}$$

と書かれる．

$W_1(x) \equiv \omega x$ は，明らかに方程式 (2.27) を満たす．そこで，$W(x) \equiv W_1(x) + \widetilde{W}(x) = \omega x + \widetilde{W}(x)$ とおくと，式 (2.27) は，$\widetilde{W}(x)$ についての微分方程式：

$$\widetilde{W}'(x) - 2\omega x \widetilde{W}(x) = \widetilde{W}^2(x) \tag{2.28}$$

に書き換えられる．この型の微分方程式は，Bernoulli 型の微分方程式とよばれ，一般解が知られている．その解法に従って，$\widetilde{W}(x)^{-1} \equiv w(x)$ とおけば，次の $w(x)$ についての 1 階の常微分方程式を得る：

$$w'(x) = -2\omega x w(x) - 1 \ . \tag{2.29}$$

従って，

$$w(x) = \mathrm{e}^{-\omega x^2} \left(C - \int^x \mathrm{e}^{\omega \bar{x}^2} \mathrm{d}\bar{x} \right) \tag{2.30}$$

と求まり（C は積分定数），式 (2.27) の一般解は，

$$W(x) \equiv W_1(x) + \frac{1}{w(x)} = \omega x + \frac{\mathrm{e}^{\omega x^2}}{C - \displaystyle\int^x \mathrm{e}^{\omega \bar{x}^2} \mathrm{d}\bar{x}} \tag{2.31}$$

と求まる．

ここで，式 (2.31) から，$W(x)$ は一般に，定義域内に特異点をもつ．これは即ち，式 (2.11) で得られる基底状態波動函数も定義域内に特異点をもつことになり，適切な量子力学系たり得ない．適切な量子力学系を得るために，我々は，式 (2.27) の解として，特異解 $W_1(x)$ を採ることにする（これは，$C \to \infty$ とすることに対応している）．このとき，1 次元調和振動子系のハミルトニアンは次のように因子化される：

$$-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 - \hbar\omega = \left(-\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \omega x \right) \left(\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \omega x \right) \ . \tag{2.32}$$

2.3.3 超対称パートナーのポテンシャルと Riccati の微分方程式

本節の最後に，超対称パートナーのポテンシャルと Riccati の微分方程式についてコメントしておく．超対称パートナーのポテンシャルとスーパーポテンシャルとの間には，

$$V_+(x) = W(x)^2 + \hbar \frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.33}$$

という関係が成り立つ．これもまた，Riccati の微分方程式である．この微分方程式を満たす（非特異な）スーパーポテンシャルはただひとつには決まらない，ということが 1980 年代に指摘された．この事実を用いて新たな可解な量子力学系を構成する研究が為されてきた [52, 53, 54, 55] が，本論文ではこれ以上は立ち入らない．

2.4 Crumの定理

2.4.1 ハミルトニアンの逐次構成

本節では，

$$\mathcal{H}^{[0]} \equiv \mathcal{A}^{[0]\dagger}\mathcal{A}^{[0]} \equiv \mathcal{H}_- \ , \quad \mathcal{H}^{[1]} \equiv \mathcal{A}^{[0]}\mathcal{A}^{[0]\dagger} \equiv \mathcal{H}_+ \tag{2.34}$$

と書く．それに伴って，固有函数も，

$$\mathcal{H}^{[0]}\psi_n^{[0]} = \mathcal{E}_n\psi_n^{[0]}(x) \ , \quad \mathcal{H}^{[1]}\psi_n^{[1]} = \mathcal{E}_{n+1}\psi_n^{[1]}(x) \tag{2.35}$$

と書くことにする．ここで，$\mathcal{H}^{[1]}$ の最低固有値は，$\mathcal{E}_1 \neq 0$ である．

2.2 節の処方に従って，$\mathcal{H}^{[1]}$ の超対称パートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[2]}$ を構成することを考える．即ち，$\mathcal{H}^{[1]}$ を次のように（半正定値化と）因子化を施し：

$$\mathcal{H}^{[1]} = \mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]} + \mathcal{E}_1 \ , \tag{2.36}$$

$\mathcal{H}^{[2]}$ を

$$\mathcal{H}^{[2]} := \mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger} + \mathcal{E}_1 \tag{2.37}$$

で定義する．$\mathcal{H}^{[2]}$ に対する Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}^{[2]}\psi_n^{[2]} = \mathcal{E}_{n+2}\psi_n^{[2]}(x)$$

と書かれ，$\mathcal{H}^{[1]}$ と $\mathcal{H}^{[2]}$ との間の絡め合わせ関係式は，

$$\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{H}^{[1]} = \mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]} = \mathcal{H}^{[2]}\mathcal{A}^{[1]} \ , \quad \mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{H}^{[2]} = \mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger} = \mathcal{H}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger}$$

である．

この処方は，元のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ の離散固有値の数だけ，繰り返し行うことができる．一般に，s 番目から $s+1$ 番目のハミルトニアンへの構成は，

$$\mathcal{H}^{[s]} := \mathcal{A}^{[s-1]}\mathcal{A}^{[s-1]\dagger} + \mathcal{E}_{s-1} = \mathcal{A}^{[s]\dagger}\mathcal{A}^{[s]} + \mathcal{E}_s \ , \tag{2.38}$$

$$\mathcal{H}^{[s+1]} := \mathcal{A}^{[s]}\mathcal{A}^{[s]\dagger} + \mathcal{E}_s \tag{2.39}$$

と書かれる．ただし，これらのハミルトニアンに対する Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}^{[s]}\psi_n^{[s]}(x) = \mathcal{E}_{n+s}\psi_n^{[s]}(x) \ , \quad \mathcal{H}^{[s+1]}\psi_n^{[s+1]}(x) = \mathcal{E}_{n+s+1}\psi_n^{[s+1]}(x) \tag{2.40}$$

である．これらふたつのハミルトニアンの間には，絡め合わせ関係式：

$$\mathcal{A}^{[s]}\mathcal{H}^{[s]} = \mathcal{A}^{[s]}\mathcal{A}^{[s]\dagger}\mathcal{A}^{[s]} = \mathcal{H}^{[s+1]}\mathcal{A}^{[s]} \ , \quad \mathcal{A}^{[s]\dagger}\mathcal{H}^{[s+1]} = \mathcal{A}^{[s]\dagger}\mathcal{A}^{[s]}\mathcal{A}^{[s]\dagger} = \mathcal{H}^{[s]}\mathcal{A}^{[s]\dagger} \tag{2.41}$$

が成り立つ．これらから，固有函数は，適当な係数を掛けて，

$$\psi_n^{[s+1]}(x) = \mathcal{A}^{[s]}\psi_{n+1}^{[s]}(x) \ , \tag{2.42}$$

$$\psi_{n+1}^{[s]}(x) = \frac{1}{\mathcal{E}_{n+s+1} - \mathcal{E}_s}\mathcal{A}^{[s]\dagger}\psi_n^{[s+1]}(x) \tag{2.43}$$

で結びつけられる．固有函数系 $\{\psi_n^{[s]}(x)\}$ のノルムは，

$$\begin{aligned}\left(\psi_n^{[s]},\psi_m^{[s]}\right) &= \left(\mathcal{E}_{n+s}-\mathcal{E}_{s-1}\right)\cdot\left(\psi_{n+1}^{[s-1]},\psi_{m+1}^{[s-1]}\right)=\cdots \\ &= \prod_{j=1}^{s}\left(\mathcal{E}_{n+s}-\mathcal{E}_{j-1}\right)\cdot\left(\psi_{n+s}^{[0]},\psi_{m+s}^{[0]}\right)\end{aligned} \tag{2.44}$$

と計算される．

ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[s]}$ や固有函数 $\psi_n^{[s]}(x)$ をロンスキアンを用いて書き表すと，

$$\mathcal{H}^{[s]}=\mathcal{H}^{[s-1]}-2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\left|\psi_0^{[s-1]}(x)\right|=\cdots=\mathcal{H}^{[0]}-2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\left|\mathrm{W}\left[\psi_0^{[0]},\psi_1^{[0]},\ldots,\psi_{s-1}^{[0]}\right](x)\right|\ , \tag{2.45}$$

$$\psi_n^{[s]}(x)=\frac{\mathrm{W}\left[\psi_0^{[s-1]},\psi_{n+1}^{[s-1]}\right](x)}{\psi_0^{[s-1]}(x)}=\cdots=\frac{\mathrm{W}\left[\psi_0^{[0]},\psi_1^{[0]},\ldots,\psi_{s-1}^{[0]},\psi_n^{[0]}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\psi_0^{[0]},\psi_1^{[0]},\ldots,\psi_{s-1}^{[0]}\right](x)} \tag{2.46}$$

となる．途中計算には，ロンスキアンの諸公式 (A.2)–(A.4) を用いている．ロンスキアンを用いたこれらの表式は，4.2 節でこのハミルトニアンの構成法に関する一般論の議論をする際に，有用である．

尚，$\mathcal{H}^{[0]}\leftrightarrow\mathcal{H}^{[1]}\leftrightarrow\mathcal{H}^{[2]}\leftrightarrow\cdots$ の変換は，多重超対称変換（多重 SUSY 変換）あるいは多重 Darboux–Crum 変換とよばれる．

2.4.2 Crum の定理

以上を纏めると，次の定理が得られる：

Crum の定理 [20]. 与えられたハミルトニアン $\mathcal{H}\equiv\mathcal{H}^{[0]}$ に対して，その離散固有値と同じ数だけパートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}, \mathcal{H}^{[2]}, \ldots$ が存在する．これらは，元のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ と等スペクトルで，$\mathcal{H}^{[j]}$ $\mathcal{H}^{[j+1]}$ の固有函数たちは，$\mathcal{A}^{[j]}$, $\mathcal{A}^{[j]\dagger}$ で関係付けられている．

この定理から，量子力学の可解性について，次のことがいえる：

- 元のハミルトニアンのエネルギー固有値と固有函数が全て求まっているとき，パートナーのハミルトニアンたち $\mathcal{H}^{[j]}$ のエネルギー固有値と固有函数も全て求めることができる．
- 全ての j に対して，$\mathcal{A}^{[j]}\psi_0^{[j]}(x)=0$ を解くことで求められる $\mathcal{H}^{[j]}$ の基底状態の固有函数 $\psi_0^{[j]}(x)$ が求まるとき，元のハミルトニアンのエネルギー固有値と固有函数を全て求めることができる．

前者は，1 つの可解系からその離散固有値の個数と同じ数だけの可解系が構成できることを意味している．また，後者は，元のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ の固有値問題を解くための手段を提示していて，その特殊な場合として，次節で扱う形状不変性をもつ系を含んでいる．これらの Crum の定理の状況は，図 2.2 のように表される．

既に述べているように，ハミルトニアンを因子化することは，原理的には常に可能である．従って，Crum の定理の構造，即ち図 2.2 に示されているような構造は，1 次元量子力学系が一般にもつ構造である．

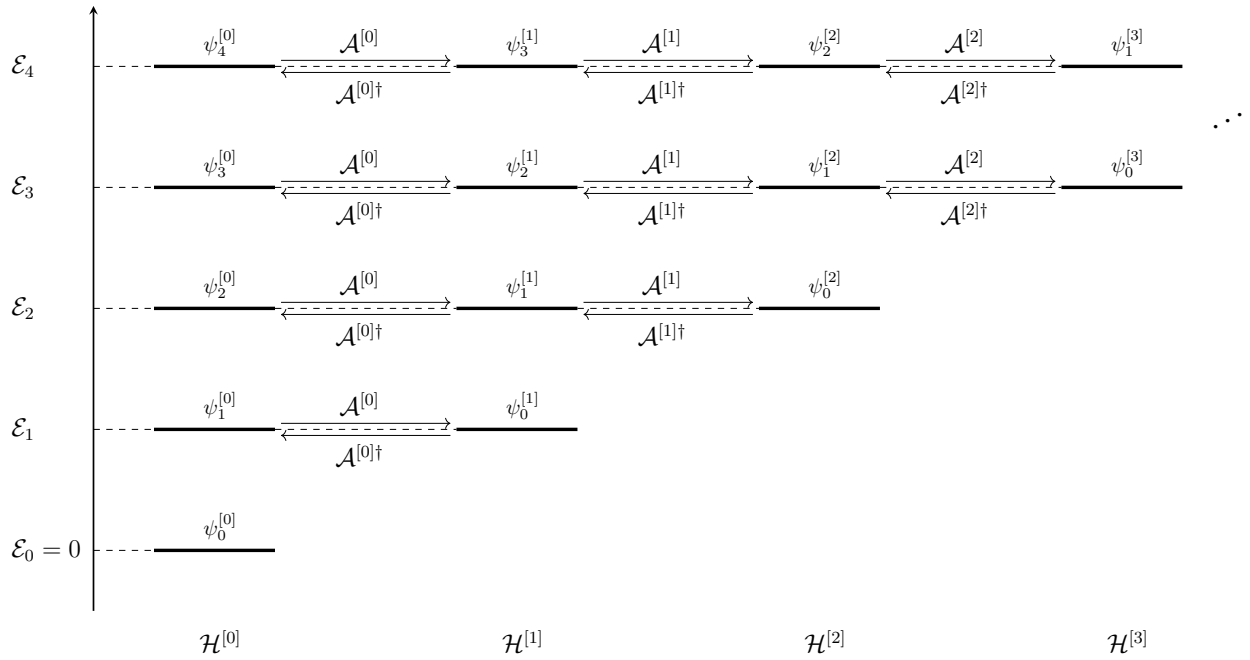


図 2.2　Crum の定理の状況．これは，1 次元量子力学系の一般的構造をも表している．

2.5　形状不変性

形状不変性のより詳しい解説は，次章の主題である．本節では，それに向けた導入を行う．2.5.1 節では，まず，形状不変性の考えや Crum の定理との関連を述べる．また，2.5.2 節では，この形状不変性がいかに重要であるかを強調し，2.5.3 節において，関連の SWKB 条件を導入する．尚，SWKB 条件に対する詳しい考察は，5 章の主題であり，本論文の独自な部分のひとつである．

2.5.1　形状不変性の定義とその構造

前節までの議論を踏まえると，あるハミルトニアンの固有値問題を解くためには，その固有値の数の分だけの状態が求まってる必要がある．本節では，どれかひとつの状態が求まれば，あとは系の縮退構造を用いて，残りの全ての固有状態が求まるようなハミルトニアンの固有値問題を考えたい．そのようなハミルトニアンには，どのような条件を課されているのだろうか．

最も簡単な場合として，図 2.1 の $\{\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$ に，図 2.3 のような“斜めの対応関係”が付いているような場合が考えられる．この“斜めの対応関係”に，系のパラメータ a について $a \to f(a)$ と置き換える，という対応関係を採用したとき，この系は形状不変 (shape invariant) である，または形状不変性 (shape invariance) をもつ，という [13]．$f(a)$ は a の適当な函数で，しばしば $f(a) = a + 1$ である．波動函数に，パラメータの依存性を明示的にかけば，この対応関係は，

$$\psi_n^{(+)}(x; a) = \psi_n^{(-)}(x; f(a)) \tag{2.47}$$

と表される．このような対応関係が付くためには，パートナーのハミルトニアン（即ちポテンシャル）同士が，定数分の差を除いて同じ函数形をもち，

$$-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x; a)^2 + \hbar \frac{\mathrm{d}W(x; a)}{\mathrm{d}x} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x; f(a))^2 - \hbar \frac{\mathrm{d}W(x; f(a))}{\mathrm{d}x} + R(a) \tag{2.48}$$

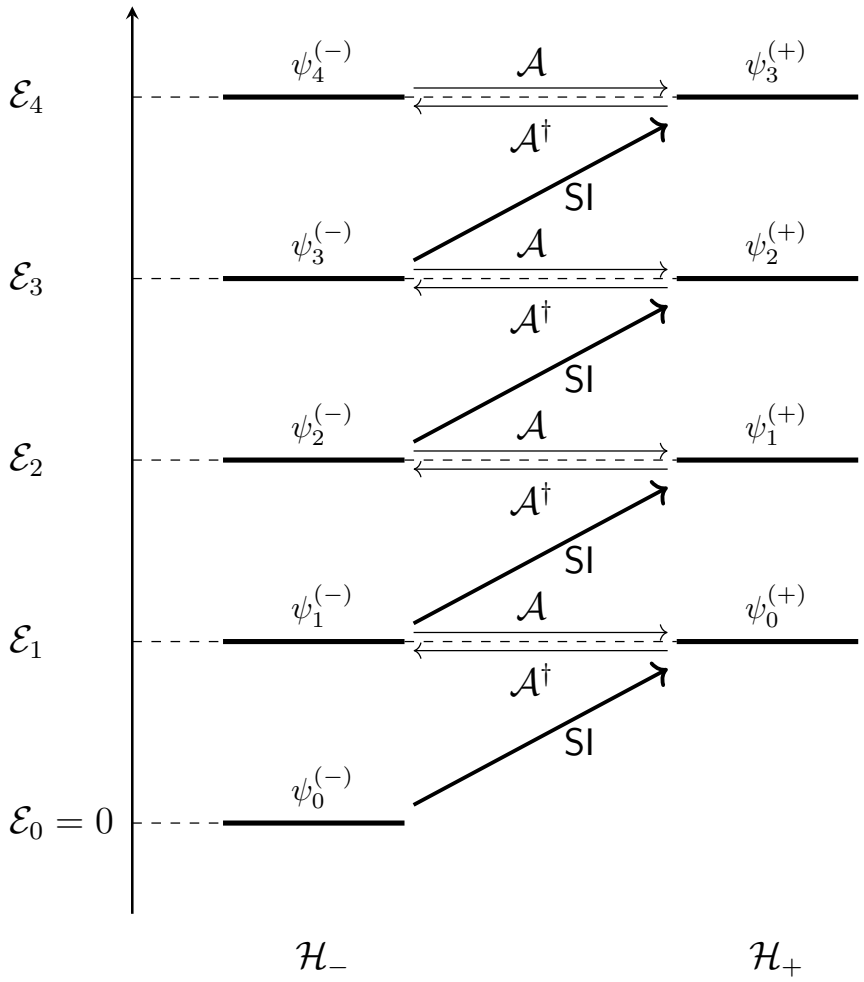


図 2.3　量子力学における超対称性の構造と形状不変性.

となっていればよい．スーパーポテンシャル $W(x)$ のパラメータ依存性を明示的に $W(x;a)$ などと表した．式 (2.48) は形状不変性の定義で，上述のように固有値問題が解けるためにハミルトニアンに課される条件式である．尚，$R(a)$ はパラメータ a の適当な函数であり，両者の基底状態のエネルギー差，即ち $\mathcal{H}_-$ の基底状態と第 1 励起状態とのエネルギー差に相当する．

図 2.3 を見ると分かるように，ひとつの状態が解析的に求まっていれば，パラメータの変更：$a \to f(a)$ や演算子 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\dagger$ を用いることによって，残りの全ての状態も解析的に求めることができる．はじめに求まっている状態は，しばしば，$\mathcal{H}_-$ の基底状態 (2.11) である．

このように，形状不変性をもつ系は，可解系のひとつである．そして，これは，Crum の定理からいえる 2 番目のことの特殊な場合になっている．このことは，次のようにして確かめられる．$\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{H}^{[0]}$ と $\mathcal{H}_+ \equiv \mathcal{H}^{[1]}$ とが，パラメータの変更 $a \to f(a)$ と定数分の差を除いて，全く同じ形で書かれることから，2.4 節の方法で構成されるパートナーのハミルトニアンたち $\mathcal{H}^{[2]}$, $\mathcal{H}^{[3]}$, ... の間にも，式 (2.48) と同様の関係が常に成り立っている．即ち，$\mathcal{H}^{[j]}$ と $\mathcal{H}^{[j+1]}$ との間に，

$$
\begin{aligned}
&-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x;f^j(a))^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W(x;f^j(a))}{\mathrm{d}x} \\
&\qquad = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x;f^{j+1}(a))^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}W(x;f^{j+1}(a))}{\mathrm{d}x} + \sum_{i=0}^{j} R(f^i(a))
\end{aligned}
$$

が成り立っている[註8]．どのパートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[j]}$ に対しても，その基底状態波動函数は $\mathcal{A}^{[j]}\psi_0^{[j]}(x)=0$ を解くことで求められ，解は，

$$\psi_0^{[j]}(x;a) \propto \psi_0^{[0]}(x;f^j(a))$$

である．

2.5.2 可解性の中心的概念としての形状不変性

この形状不変性をもつ系の具体例を，表 2.1 に示す．表 2.1 には，学部レヴェルの量子力学で扱われるポテンシャルの多くが含まれている．例えば，1 次元調和振動子や Coulomb ポテンシャルは馴染み深いものであり，古くから研究されてきたものでもある．また，Pöschl–Teller ポテンシャルと Rosen–Morse ポテンシャルとは，それぞれ無限井戸型ポテンシャルと自由粒子の場合の超対称パートナーのポテンシャルである．形状不変性は可解性の十分条件に過ぎないものの，このように有名な可解系が悉く持ち合わせている性質であるということから，これを元手に可解性の議論ができるという意味において非常に重要で，可解性の中心的な概念であるといえる．

更に，あるときは種々の可解系が形状不変系を変形して得られ，またあるときには種々の可解系に含まれるパラメータの適当な極限をとることで形状不変系に到達する．この意味でも，形状不変性が可解性の中心的な概念であることが分かる．尚，形状不変な系から新しい可解系を構成する手法は，4 章で紹介する．

表 2.1　形状不変性をもつ系のリスト（一部）

ポテンシャル	$W(x)$	$V(x)$
1 次元調和振動子	ωx	$\omega^2x^2-\hbar\omega$
動径振動子	$\omega x-\dfrac{\hbar g}{x}$	$\omega^2x^2+\dfrac{\hbar^2g(g-1)}{x^2}-\hbar\omega(2g+1)$
Pöschl–Teller ポテンシャル	$-\hbar(g\cot x-h\tan x)$	$\dfrac{\hbar^2g(g-1)}{\sin^2x}+\dfrac{\hbar^2h(h-1)}{\cos^2x}-\hbar^2(g+h)^2$
Coulomb ポテンシャル	$\dfrac{e^2}{2\hbar g}-\dfrac{\hbar g}{x}$	$\dfrac{\hbar^2g(g-1)}{x^2}-\dfrac{e^2}{x}+\dfrac{e^4}{4\hbar^2g^2}$
超球面空間における Kepler 問題	$\dfrac{\hbar\mu}{g}-\hbar g\cot x$	$\dfrac{\hbar^2g(g-1)}{\sin^2x}-2\hbar^2\mu\cot x+\frac{\hbar^2\mu^2}{g^2}-\hbar^2g^2$
Morse ポテンシャル	$\hbar(\mu\mathrm{e}^x-h)$	$\hbar^2\mu^2\mathrm{e}^{2x}-\hbar^2\mu(2h+1)\mathrm{e}^x+\hbar^2h^2$
Rosen–Morse ポテンシャル	$\dfrac{\hbar\mu}{h}+\hbar h\tanh x$	$-\dfrac{\hbar^2h(h+1)}{\cosh^2x}+2\hbar^2\mu\tanh x+\hbar^2h^2+\dfrac{\hbar^2\mu^2}{h^2}$
双曲的対称こま II	$\dfrac{\hbar\mu}{\cosh x}+\hbar h\tanh x$	$\dfrac{-\hbar^2h(h+1)+\hbar^2\mu^2+\hbar^2\mu(2h+1)\sinh x}{\cosh^2x}+\hbar^2h^2$
Eckart ポテンシャル	$\dfrac{\hbar\mu}{g}+\hbar g\coth x$	$\dfrac{\hbar^2g(g-1)}{\sinh^2x}-2\hbar^2\mu\coth x+\hbar^2g^2+\dfrac{\hbar^2\mu^2}{g^2}$
双曲的 Pöschl–Teller ポテンシャル	$-\hbar(g\coth x-h\tanh x)$	$\dfrac{\hbar^2g(g-1)}{\sinh^2x}-\dfrac{\hbar^2h(h+1)}{\cosh^2x}+\hbar^2(h-g)^2$

[註8] 記号 $f^j(a)$ は，次の意味で用いられる：

$$f^j(a) \coloneqq \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{j\text{ 個}}(a)\ .$$

他方，$W(x)^2$ は，$[W(x)]^2$ の意味である．

2.5.3　形状不変性と等価だと考えられてきた条件式

ここで，本論文の主題のひとつである SWKB (supersymetric WKB) 量子化条件（または，SWKB 条件）[22] を紹介する．この条件は，長い間，形状不変性と等価だと考えられてきたもので，

$$\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}\,\mathrm{d}x = n\pi\hbar\ , \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\ , \tag{2.49}$$

と書き表される．ただし，$a_{\mathrm{L}} < a_{\mathrm{R}}$ は，x についての方程式 $W(x)^2 = \mathcal{E}_n$ の 2 解である．

初めに述べた通り，この条件式に詳しい考察を与えることは第 5 章の主題であり，本論文の主要な部分をなす．従って，ここではその条件式の紹介に留め，詳細な説明は 5 章に譲る．

2.6　d 次元空間での中心力問題と N 体問題での“中心力問題”

本節では，簡単のために，$\hbar = 1$ の単位系を採用することにする．以下では，d 次元空間での中心力問題や N 体問題での“中心力問題”が，解ける量子力学の枠組みに適合することをみてゆく．具体的には，空間次元を上げたり少数多体問題を考えたりしても，1 次元の 1 体問題と同様にハミルトニアンは因子化され得る，ということを計算によって示してゆく．

2.6.1　d 次元空間での中心力問題における解ける量子力学

d 次元空間での中心力問題に対する Schrödinger 方程式の動径成分は，

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\ell(\ell+N-2)}{r^2} + V(r)\right] R(r) = \mathcal{E}R(r) \tag{2.50}$$

と書かれる．ここで，d 次元空間の直交座標系を $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ として $r \coloneqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$ であり，ℓ は軌道角運動量の量子数を表す．また，$R(r)$ は動径波動函数である．$R(r) = r^{-(d-1)/2}\psi(x)$ とすると，Schrödinger 方程式 (2.50) は，

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\left(\ell + \frac{d-3}{2}\right)\left(\ell + \frac{d-3}{2} + 1\right)}{r^2} + V(r)\right] \psi(r) = \mathcal{E}\psi(r)\ . \tag{2.51}$$

となる．

式 (2.51) の [•] 内は，前節までのハミルトニアンに相当する．[•] 部分は，

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\left(\ell + \frac{d-1}{2}\right)\left(\ell + \frac{d-3}{2}\right)}{r^2} + V(r) \\ &\qquad = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{\ell + \frac{d-3}{2}}{r} + \widetilde{W}(r)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{\ell + \frac{d-3}{2}}{r} + \widetilde{W}(r)\right) \end{aligned} \tag{2.52}$$

と因子化され得る．従って，d 次元空間での中心力問題は，解ける量子力学の定式化によく合うことが分かる．

2.6.2 N 体問題での“中心力問題”における解ける量子力学

N 体の“中心力問題”に対する Schrödinger 方程式のハイパー動径[註9]成分は，

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{3N-4}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\gamma(\gamma+3N-5)}{x^2}+V(x)\right]X(x)=\mathcal{E}X(x) \tag{2.53}$$

と書かれる．ここで，x はハイパー動径で，γ はハイパー軌道角運動量の量子数である．また，$X(x)$ はハイパー動径波動函数である．$X(x)=x^{-(3N-4)/2}\psi(x)$ とすると，Schrödinger 方程式 (2.53) は，

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\gamma(\gamma+3N-5)+\frac{(3N-4)(3N-6)}{4}}{x^2}+V(x)\right]\psi(x)=\mathcal{E}\psi(x)\ . \tag{2.54}$$

となる．

式 (2.54) の [•] 内は，ハミルトニアンに相当する．

$$\gamma(\gamma+3N-5)+\frac{(3N-4)(3N-6)}{4}=\left(\gamma+\frac{3N-6}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3N-6}{2}+1\right)$$

と変形できることから，[•] 部分は，

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\gamma(\gamma+3N-5)+\frac{(3N-4)(3N-6)}{4}}{x^2}+V(x)&\\ =\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{\gamma+\frac{3N-6}{2}}{x}+\widetilde{W}(x)\right)&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{\gamma+\frac{3N-6}{2}}{x}+\widetilde{W}(x)\right)\end{aligned} \tag{2.55}$$

と因子化され得る．従って，N 体の“中心力問題”もまた，解ける量子力学の定式化によく合うことが分かる．$N=2$ の場合は，3.2 節の例に含まれる，所謂「Coulomb ポテンシャル」の場合が代表的な例題である．このとき，x は相対座標で，γ は軌道角運動量 ℓ である．Coulomb 問題は，解ける量子力学の枠組みでも解かれることが知られている．$N=3$ の場合については，6.3 節で，x の定義も含めて，扱うことにする．$N\geqslant 4$ の場合は，附録 E.4 を参照のこと．

[註9] “hyperradius” の訳語である．この一般的な定義は，E.4.2 節で行う．数学用語としての “hyper” はしばしば「超」と訳される．しかし，これでは「超対称性 (supersymmetry)」を表す「超」と混同しかねない．何か別の漢字を当てることも考えられるが，それでは原義が取りづらくなってしまう可能性が高いので，本論文では「ハイパー」と表記をすることにする．ただし，“hypersphere” には「超球・超球面」との定訳があり，これを採用する．かつて我が国では，“energy” や “potential” を「勢力」などと訳していた時代があった．現代社会で頻繁に見受けられるように不用意にカタカナ語を用いることはみっともないことだと感じるが，何が何でもカタカナ語を排除してしまおうとするのも滑稽なものである．ただ，日本語訳されていないカタカナ語を漢字で置き換える努力をすることは，その概念を深く理解する上で有益なことだとも思われる．「勢力」という熟語からは，当時の日本人たちのそのような努力が感じ取られる．

第3章

形状不変性

本章では，2.5 節で導入した形状不変性に対して，より詳細な解説を与える．本章の構成は，以下の通り．3.1 節では，形状不変性に対する一般論を述べる．続く 3.2 節では，形状不変系の例として，文献 [50] にある全ての形状不変系を挙げ，それらの固有値と固有函数を示している．本論文のように，形状不変系のリストを，$\hbar$ を明示的に（しかも正確に）記している文献は，他にない．3.3 節では，これらの形状不変系に対して，その代数構造を議論する．本章の最後に当たる 3.4 節では，3.2 節で扱わなかった形状不変系を紹介している．

3.1 一般論

2.5.1 節で述べたように，超対称パートナーのハミルトニアンが，

$$-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+W(x;a)^2+\hbar\frac{\mathrm{d}W(x;a)}{\mathrm{d}x}=-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+W(x;f(a))^2-\hbar\frac{\mathrm{d}W(x;f(a))}{\mathrm{d}x}+R(a) \quad (2.48)$$

を満たすとき，この系は形状不変で (shape invariant) ある，または形状不変性 (shape invariance) をもつ，という．一般に，系が形状不変性をもつか否かは，その系が式 (2.48) を満たすかどうかを調べればよい．

形状不変性をもつ系（以下では簡単に形状不変系とよぶ）：

$$\mathcal{H}^{[0]}=-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+W(x;a)^2-\hbar\frac{\mathrm{d}W(x;a)}{\mathrm{d}x}\ ,$$

では，Crum の定理と併せて考えることで，j 番目のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[j]}$ が

$$\mathcal{H}^{[j]}+\mathcal{E}_j=-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+W(x;f^j(a))^2-\hbar\frac{\mathrm{d}W(x;f^j(a))}{\mathrm{d}x}+\sum_{i=0}^{j-1}R(f^i(a)) \quad (3.1)$$

と書かれることが分かる．従って，形状不変系 $\mathcal{H}^{[0]}$ の固有値と固有函数は，$n\geqslant 1$ に対して，

$$\text{固有値：}\qquad \mathcal{E}_n=\sum_{i=0}^{n-1}R(f^i(a)) \quad (3.2)$$

$$\text{固有函数：}\qquad \phi_n(x)=\mathcal{N}_n\mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[2]\dagger}\cdots\mathcal{A}^{[n-1]\dagger}\phi_0(x)\equiv\mathcal{N}_n\left(\prod_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}^{[i]\dagger}\right)\phi_0(x) \quad (3.3)$$

である．尚，式 (3.3) は，古典直交多項式の Rodrigues の公式 (A.13), (A.18), (A.22) に対応する．

また，形状不変系における $\mathcal{H}^{[j]}\to\mathcal{H}^{[j+1]}$ の変換を，特に形状不変変換とよぶことがある．

3.2 例

2.5.1 節で述べた通り，形状不変系では，ある固有状態が求まれば，全ての固有状態が計算される．本節では基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ が既知だとして，これを起点に議論を進めてゆく．具体的には，$\phi_0(x)$ を用いて，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ を構成し，式 (3.2) を用いてエネルギー $\mathcal{E}_n$ を計算する．更に，これらを満たす Schrödnger 方程式を書き下し，固有函数 $\phi_n(x)$ を求める，という手順である．本節では，文献 [50] に挙げられているものを全て取り上げた．

3.2.1 1 次元調和振動子

1 次元調和振動子の基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，角振動数 ω を用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} \ , \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.4}$$

と表される．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャルと $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = \omega x \ , \tag{3.5}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \omega^2 x^2 - \hbar\omega \ , \tag{3.6}$$

と書かれる．他方，超対称パートナーのポテンシャル $V_+(x)$ は，

$$V_+(x) = \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \omega^2 x^2 + \hbar\omega \tag{3.7}$$

と書かれる．式 (2.48) から，形状不変変換において変更されるパラメータは存在しない．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = 2n\hbar\omega \equiv \mathcal{E}_n^{(\mathrm{H})} \tag{3.8}$$

である．この系は，無限個の離散固有値をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 - \hbar\omega \right) \phi_n(x) = 2n\hbar\omega \phi_n(x) \tag{3.9}$$

であり，$x \to \xi \equiv \sqrt{\omega/\hbar}x$ なる変数変換を行えば，

$$\hbar\omega \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi^2 - 1 - 2n \right) \check{\phi}_n(\xi) = 0 \ , \tag{3.10}$$

を得る．式 (3.10) は，$\hbar = \omega = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.10) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\begin{aligned} \check{\phi}_n(\xi) &= \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \\ = \phi_n(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x \right) \equiv \phi_n^{(\mathrm{H})}(x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

と分かる．尚，1 次元調和振動子の基底状態波動函数 $\phi_0^{(\mathrm{H})}(x)$ の 2 乗は，Hermite 多項式系の重み函数に等しい．

3.2.2 動径振動子

動径振動子の基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，角振動数 ω とパラメータ $g > 1/2$ とを用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} x^g \ , \quad x \in [0, \infty) \tag{3.12}$$

と表される．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = \omega x - \frac{\hbar g}{x} \ , \tag{3.13}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} - \hbar\omega(2g+1) \ , \tag{3.14}$$

と書かれる．他方，超対称パートナーのポテンシャル $V_+(x)$ は，

$$V_+(x) = \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2 g(g+1)}{x^2} - \hbar\omega(2g-1) \tag{3.15}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g は，形状不変変換において，$g \to g+1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = 4n\hbar\omega \equiv \mathcal{E}_n^{(\mathrm{L})} \tag{3.16}$$

である．この系は，無限個の離散固有値をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} - \hbar\omega(2g+1) \right) \phi_n(x) = 4n\hbar\omega\phi_n(x) \tag{3.17}$$

であり，$x \to \xi \equiv \sqrt{\omega/\hbar}x$ なる変数変換を行えば，

$$\hbar\omega \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi^2 + \frac{g(g-1)}{\xi^2} - 2g - 1 - 4n \right) \check{\phi}_n(\xi) = 0 \tag{3.18}$$

を得る．式 (3.18) は，$\hbar = \omega = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.18) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\begin{aligned} \check{\phi}_n(\xi) &= \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^g L_n^{(g-1/2)}(\xi^2) \\ = \phi_n(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x \right)^g L_n^{(g-1/2)} \left(\frac{\omega}{\hbar} x^2 \right) \equiv \phi_n^{(\mathrm{L})}(x) \end{aligned} \tag{3.19}$$

と分かる．尚，動径振動子の基底状態波動函数 $\phi_0^{(\mathrm{L})}(x)$ の 2 乗は，Laguerre 多項式系の重み函数に等しい．

3.2.3 Pöschl–Teller ポテンシャル

Pöschl–Teller ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ $g, h > 1/2$ を用いて，

$$\phi_0(x) = (\sin x)^g (\cos x)^h \ , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.20}$$

と表される．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = -\hbar (g \cot x - h \tan x) \ , \tag{3.21}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2 h(h-1)}{\cos^2 x} - \hbar^2 (g+h)^2 \ , \tag{3.22}$$

と書かれる．他方，超対称パートナーのポテンシャル $V_+(x)$ は，

$$V_+(x) = \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \frac{\hbar^2 g(g+1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cos^2 x} - \hbar^2 (g+h)^2 \tag{3.23}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g, h は，形状不変変換において，$g \to g+1$, $h \to h+1$ のように変換される．また，式 (2.48) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = 4\hbar^2 n(n+g+h) \equiv \mathcal{E}_n^{(\mathrm{J})} \tag{3.24}$$

である．この系は，無限個の離散固有値をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2 h(h-1)}{\cos^2 x} - \hbar^2 (g+h)^2 \right) \phi_n(x) = 4\hbar^2 n(n+g+h) \phi_n(x) \tag{3.25}$$

であり，

$$\hbar^2 \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{h(h-1)}{\cos^2 x} - (g+h)^2 - 4n(n+g+h) \right) \phi_n(x) = 0 \tag{3.26}$$

と変形される．式 (3.26) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.26) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\phi_n(x) = (\sin x)^g (\cos x)^h P_n^{(g-1/2, h-1/2)}(\cos 2x) \equiv \phi_n^{(\mathrm{J})}(x) \tag{3.27}$$

と分かる．尚，Pöschl–Teller ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0^{(\mathrm{J})}(x)$ の 2 乗は，Jacobi 多項式系の重み函数に等しい．

3.2.4 その他の形状不変系

■ $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ポテンシャル

$\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ $g > 1/2$ を用いて，

$$\phi_0(x) = (\sin x)^g \ , \quad x \in (0, \pi) \tag{3.28}$$

と表される．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = -\hbar g \cot x \ , \tag{3.29}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} - \hbar^2 g^2 \ , \tag{3.30}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g は，形状不変変換において，$g \to g+1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = \hbar^2 n(n+2g) \tag{3.31}$$

である．この系は，無限個の離散固有値をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} - \hbar^2 g^2\right)\phi_n(x) = \hbar^2 n(n+2g)\phi_n(x) \tag{3.32}$$

であり，

$$\hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{g(g-1)}{\sin^2 x} - g^2 - n(n+2g)\right)\phi_n(x) = 0 \tag{3.33}$$

と変形される．式 (3.33) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.33) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\phi_n(x) = (\sin x)^g P_n^{(g-1/2, g-1/2)}(\cos x) \tag{3.34}$$

と分かる．

■ Coulomb ポテンシャル

Coulomb ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，素電荷 e とパラメータ $g > 1/2$ とを用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{e^2 x}{2\hbar^2 g}} x^g \ , \quad x \in [0, \infty) \tag{3.35}$$

と表される．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x) = \frac{e^2}{2\hbar g} - \frac{\hbar g}{x} \ , \tag{3.36}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x)\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\phi_0(x)\right] = \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} - \frac{e^2}{x} + \frac{e^4}{4\hbar^2 g^2} \ , \tag{3.37}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g は，形状不変変換において，$g \to g+1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = \frac{e^4}{4\hbar^2 g^2} - \frac{e^4}{4\hbar^2(g+n)^2} \tag{3.38}$$

である．この系は，無限個の離散固有値をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} - \frac{e^2}{x} + \frac{e^4}{4\hbar^2 g^2}\right)\phi_n(x) = \left(\frac{e^4}{4\hbar^2 g^2} - \frac{e^4}{4\hbar^2(g+n)^2}\right)\phi_n(x) \tag{3.39}$$

であり，$x \to \xi \equiv \dfrac{e^2}{2\hbar^2}x$ なる変数変換を行えば，

$$\frac{e^4}{4\hbar^2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{g(g-1)}{\xi^2} - \frac{2}{\xi} + \frac{1}{(g+n)^2}\right)\check{\phi}_n(\xi) = 0 \tag{3.40}$$

を得る．式 (3.40) は，$\hbar = 1$, $e^2 = 2$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.40) の微分方程式を解くことで,，固有函数は，

$$\begin{aligned}\check{\phi}_n(\xi) &= \mathrm{e}^{-\frac{\xi}{g+n}} \xi^g L_n^{(2g-1)}\left(\frac{2}{g+n}\xi\right) \\ = \phi_n(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{e^2 x}{2\hbar^2(g+n)}} \left(\frac{e^2}{2\hbar^2}x\right)^g L_n^{(2g-1)}\left(\frac{e^2}{\hbar^2(g+n)}x\right)\end{aligned} \tag{3.41}$$

と分かる．

■ 超球面空間における Kepler 問題

超球面空間における Kepler 問題の基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ $g > 3/2$, $\mu > 0$ を用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{g}x} (\sin x)^g \ , \quad x \in (0, \pi) \tag{3.42}$$

と表される．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = \frac{\hbar\mu}{g} - \hbar g \cot x \ , \tag{3.43}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} - 2\hbar^2 \mu \cot x + \frac{\hbar^2 \mu^2}{g^2} - \hbar^2 g^2 \ , \tag{3.44}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g は，形状不変変換において，$g \to g+1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2} - \hbar^2 g^2 + \hbar^2 (g+n)^2 \tag{3.45}$$

である．この系は，無限個の離散固有値をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\begin{aligned}&\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} - 2\hbar^2 \mu \cot x + \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \hbar^2 g^2 \right) \phi_n(x) \\ &\qquad = \left(\frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2} - \hbar^2 g^2 + \hbar^2 (g+n)^2 \right) \phi_n(x)\end{aligned} \tag{3.46}$$

であり，

$$\hbar^2 \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{g(g-1)}{\sin^2 x} - 2\mu \cot x + \frac{\mu^2}{(g+n)^2} - (g+n)^2 \right) \phi_n(x) = 0 \tag{3.47}$$

と変形される．式 (3.47) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.47) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\begin{aligned}&\phi_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{g+n}x} (\sin x)^{g+n} (\mathrm{i}^{-n}) P_n^{(\alpha_n, \beta_n)} (\mathrm{i} \cot x) \ , \\ &\alpha_n \equiv -g - n + \mathrm{i}\frac{\mu}{g+n} \ , \quad \beta_n \equiv -g - n - \mathrm{i}\frac{\mu}{g+n}\end{aligned} \tag{3.48}$$

と分かる．

■ **Morse ポテンシャル**

Morse ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ $h,\, \mu > 0$ を用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{hx-\mu\mathrm{e}^x} \ , \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.49}$$

と書かれる．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = \hbar(\mu\mathrm{e}^x - h) \ , \tag{3.50}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \hbar^2\mu^2\mathrm{e}^{2x} - \hbar^2\mu(2h+1)\mathrm{e}^x + \hbar^2 h^2 \ , \tag{3.51}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ h は，形状不変変換において，$h \to h-1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = 2\hbar^2 nh - \hbar^2 n^2 \tag{3.52}$$

である．この系は，有限個の離散固有値：$0 \leqslant n \leqslant \lfloor h \rfloor$ をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \hbar^2\mu^2\mathrm{e}^{2x} - \hbar^2\mu(2h+1)\mathrm{e}^x + \hbar^2 h^2 \right) \phi_n(x) = (2\hbar^2 nh - \hbar^2 n^2)\phi_n(x) \tag{3.53}$$

であり，

$$\hbar^2 \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \mu^2\mathrm{e}^{2x} - \mu(2h+1)\mathrm{e}^x + h^2 - 2nh + n^2 \right) \phi_n(x) = 0 \ , \tag{3.54}$$

と変形される．式 (3.54) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.54) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\phi_n(x) = \mathrm{e}^{hx-\mu\mathrm{e}^x} (2\mu\mathrm{e}^x)^{-n} L_n^{(2h-2n)}(2\mu\mathrm{e}^x) \tag{3.55}$$

と分かる．

■ $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$（ソリトン）**ポテンシャル**

$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$（ソリトン）ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ $h > 1/2$ を用いて，

$$\phi_0(x) = (\cosh x)^{-h} \ , \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.56}$$

と書かれる．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = \hbar h \tanh x \ , \tag{3.57}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = -\frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cosh^2 x} + \hbar^2 h^2 \ , \tag{3.58}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ h は，形状不変変換において，$h \to h-1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = 2\hbar^2 nh - \hbar^2 n^2 \tag{3.59}$$

である．この系は，有限個の離散固有値：$0 \leqslant n \leqslant \lfloor h \rfloor$ をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cosh^2 x} + \hbar^2 h^2\right)\phi_n(x) = (2\hbar^2 nh - \hbar^2 n^2)\phi_n(x) \tag{3.60}$$

であり，

$$\hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{h(h+1)}{\cosh^2 x} + h^2 - 2nh + n^2\right)\phi_n(x) = 0 \tag{3.61}$$

と変形される．式 (3.61) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.61) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\phi_n(x) = (\cosh x)^{n-h} P_n^{(h-n,h-n)}(\tanh x) \tag{3.62}$$

と分かる．

■ Rosen–Morse ポテンシャル

Rosen–Morse ポテンシャルの基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ h, μ $(h > \sqrt{\mu} > 0)$ を用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\hbar}x}(\cosh x)^{-h}\ , \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.63}$$

と書かれる．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x) = \frac{\hbar\mu}{h} + \hbar h \tanh x\ , \tag{3.64}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x)\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\phi_0(x)\right] = -\frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cosh^2 x} + 2\hbar^2\mu\tanh x + \hbar^2 h^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{h^2}\ , \tag{3.65}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ h は，形状不変変換において，$h \to h-1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = \hbar^2 h^2 - \hbar^2(h-n)^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{h^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(h-n)^2} \tag{3.66}$$

である．この系は，有限個の離散固有値：$0 \leqslant n \leqslant \lfloor h \rfloor$ をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cosh^2 x} + 2\hbar^2\mu\tanh x + \hbar^2 h^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{h^2}\right)\phi_n(x)\ ,$$
$$= \left(\hbar^2 h^2 - \hbar^2(h-n)^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{h^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(h-n)^2}\right)\phi_n(x) \tag{3.67}$$

であり，

$$\hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\frac{h(h+1)}{\cosh^2 x}+2\mu\tanh x+(h-n)^2+\frac{\mu^2}{(h-n)^2}\right)\phi_n(x)=0 \tag{3.68}$$

と変形される．式 (3.68) は，$\hbar=1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.68) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\begin{aligned}&\phi_n(x)=\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{h-n}x}(\cosh x)^{n-h}P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\tanh x)\\&\alpha_n\equiv h-n+\frac{\mu}{h-n}\ ,\quad \beta_n\equiv h-n-\frac{\mu}{h-n}\end{aligned} \tag{3.69}$$

と分かる．

■ 双曲的対称こま II

双曲的対称こま II の基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ $h,\,\mu>0$ を用いて，

$$\phi_0(x)=\mathrm{e}^{-\mu\tan^{-1}\sinh x}(\cosh x)^{-h}\ ,\quad x\in(-\infty,\infty) \tag{3.70}$$

と書かれる．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x)\equiv-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x)=\frac{\hbar\mu}{\cosh x}+\hbar h\tanh x\ , \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}V_-(x)&\equiv\hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x)\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\phi_0(x)\right]\\&=\frac{-\hbar^2h(h+1)+\hbar^2\mu^2+\hbar^2\mu(2h+1)\sinh x}{\cosh^2 x}+\hbar^2h^2\ ,\end{aligned} \tag{3.72}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ h は，形状不変変換において，$h\to h-1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n=2\hbar^2nh-\hbar^2n^2 \tag{3.73}$$

である．この系は，有限個の離散固有値：$0\leqslant n\leqslant\lfloor h\rfloor$ をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{-\hbar^2h(h+1)+\hbar^2\mu^2+\hbar^2\mu(2h+1)\sinh x}{\cosh^2 x}+\hbar^2h^2\right)\phi_n(x)=(2\hbar^2nh-\hbar^2n^2)\phi_n(x) \tag{3.74}$$

であり，

$$\hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{-h(h+1)+\mu^2+\mu(2h+1)\sinh x}{\cosh^2 x}+h^2-2nh+n^2\right)\phi_n(x)=0 \tag{3.75}$$

と変形される．式 (3.75) は，$\hbar=1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.75) の微分方程式を解くことで,，固有函数は，

$$\begin{aligned}&\phi_n(x)=\mathrm{e}^{-\mu\tan^{-1}\sinh x}(\cosh x)^{-h}(\mathrm{i}^{-n})P_n^{(\alpha,\beta)}(\mathrm{i}\sinh x)\ ,\\&\alpha\equiv-h-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\mu\ ,\quad \beta\equiv-h-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\mu\end{aligned} \tag{3.76}$$

と分かる．

■ Eckart ポテンシャル

Eckart ポテンシャルの基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ g, μ $(\sqrt{\mu} > g > 1/2)$ を用いて，

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{g}x}(\sinh x)^g \ , \quad x \in (0, \infty) \tag{3.77}$$

と書かれる．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x) = \frac{\hbar\mu}{g} + \hbar g\coth x \ , \tag{3.78}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x)\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\phi_0(x)\right] = \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sinh^2 x} - 2\hbar^2\mu\coth x + \hbar^2 g^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} \ , \tag{3.79}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g は，形状不変変換において，$g \to g+1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = \hbar^2 g^2 - \hbar^2(g+n)^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2} \tag{3.80}$$

である．この系は，有限個の離散固有値：$0 \leqslant n \leqslant \lfloor\sqrt{\mu} - g\rfloor$ をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sinh^2 x} - 2\hbar^2\mu\coth x + \hbar^2 g^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2}\right)\phi_n(x) = \left(\hbar^2 g^2 - \hbar^2(g+n)^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2}\right)\phi_n(x) \tag{3.81}$$

であり，

$$\hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{g(g-1)}{\sinh^2 x} - 2\mu\coth x + (g+n)^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2}\right)\phi_n(x) = 0 \tag{3.82}$$

と変形される．式 (3.82) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.82) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\phi_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{g+n}x}(\sinh x)^{g+n}P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\coth x) \ , \tag{3.83}$$

$$\alpha_n \equiv -g - n + \frac{\mu}{g+n} \ , \quad \beta_n \equiv -g - n - \frac{\mu}{g+n} \tag{3.84}$$

と分かる．

■ 双曲的 Pöschl–Teller ポテンシャル

双曲的 Pöschl–Teller ポテンシャルの基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ は，パラメータ g, h $(h > g > 1/2)$ を用いて，

$$\phi_0(x) = (\sinh x)^g(\cosh x)^{-h} \ , \quad x \in (0, \infty) \tag{3.85}$$

と書かれる．このとき，スーパーポテンシャル $W(x)$ とポテンシャル $V_-(x)$ とは，それぞれ

$$W(x) \equiv -\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) = -\hbar (g \coth x - h \tanh x) \ , \tag{3.86}$$

$$V_-(x) \equiv \hbar^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \phi_0(x) \right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \phi_0(x) \right] = \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sinh^2 x} - \frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cosh^2 x} + \hbar^2 (h-g)^2 \ , \tag{3.87}$$

と書かれる．式 (2.48) から，パラメータ g, h は，形状不変変換において，$g \to g+1, h \to h-1$ のように変換される．また，式 (3.2) と併せて，エネルギー $\mathcal{E}_n$ は，

$$\mathcal{E}_n = 4\hbar^2 n(h-g-n) \tag{3.88}$$

である．この系は，有限個の離散固有値：$0 \leqslant n \leqslant \left\lfloor \dfrac{h-g}{2} \right\rfloor$ をもつ．以上から，Schrödinger 方程式は，

$$\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sinh^2 x} - \frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cosh^2 x} + \hbar^2 (h-g)^2 \right) \phi_n(x) = 4\hbar^2 n(h-g-n) \phi_n(x) \tag{3.89}$$

であり，

$$\hbar^2 \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{g(g-1)}{\sinh^2 x} - \frac{h(h+1)}{\cosh^2 x} + (h-g)^2 - 4n(h-g-n) \right) \phi_n(x) = 0 \tag{3.90}$$

と変形される．式 (3.90) は，$\hbar = 1$ なる単位系での Schrödinger 方程式に他ならない．式 (3.90) の微分方程式を解くことで，固有函数は，

$$\phi_n(x) = (\sinh x)^g (\cosh x)^{-h} P_n^{(g-1/2, -h-1/2)}(\cosh 2x) \tag{3.91}$$

と分かる．

3.3 形状不変系の代数構造

形状不変系には，特有の代数構造が存在する．形状不変系の可解性は，この代数構造によって保証されている，といえる．その代数を用いて問題を解くことができるからだ．形状不変系の代数構造に関する研究は，1993 年の福井らによる仕事 [56] や，1997 年以降の A. Gangopadhyaya らによる仕事 [57, 58, 59, 60] などがある．

繰り返し述べているように，形状不変性は，可解性の中心的な概念である．そこで，形状不変性の構造を詳しく調べることは，可解性そのものの理解においても，更には他の可解系の構造を調べる上でも肝要である．本節では，まず 3.3.1 節で形状不変系がもつ代数構造の一般論を述べ，3.3.2 節と 3.3.3 節では，軌道角運動量の代数構造との対比において，特に 3.2 節で挙げたような，$f(a) = a + d$ の場合の形状不変系に対してこの代数が実際にどう表現され得るかをみてゆく．

3.3.1 一般論

T は，パラメータ a を含む函数 $g(x;a)$ に作用して，そのパラメータを $a \to f(a)$ と変換する演算を表すとする：

$$Tg(x;a) = g(x;f(a)) \ .$$

また，演算子 $\hat{\mathscr{O}}(x;a)$ は，

$$T\hat{\mathscr{O}}(x;a)T^{-1} = \hat{\mathscr{O}}(x;f(a))$$

と変換される．ただし，T^{-1} について，$TT^{-1} = T^{-1}T = 1$ であり，$T^{-1}g(x;f(a)) = g(x;a)$ である．更に，T の Hermite 共軛 $T^\dagger$ は，固有状態 $|\phi(x;a)\rangle$ の左から T を作用させたもの：

$$T\,|\phi(x;a)\rangle = |\phi(x;f(a))\rangle \ ,$$

の Hermite 共軛をとることで，$\langle\phi(x;a)|\,T^\dagger = \langle\phi(x;f(a))|$ と作用することが分かる．

本小節では，形状不変性の条件式 (2.48) を

$$\mathcal{A}(x;a)\mathcal{A}^\dagger(x;a) = \mathcal{A}^\dagger(x;f(a))\mathcal{A}(x;f(a)) + \widetilde{R}(f(a)) \tag{3.92}$$

と書くことにする（$\widetilde{R}(f(a)) \equiv R(a)$）．これは，演算子 T を用いて書けば，

$$\mathcal{A}(x;a)\mathcal{A}^\dagger(x;a) = T\left[\mathcal{A}^\dagger(x;a)\mathcal{A}(x;a) + \widetilde{R}(a)\right]T^{-1} \tag{3.93}$$

となる．

ここで，次のふたつの演算子を定義する[註10]：

$$\begin{cases} \mathscr{A}_+(x;a) := \mathcal{A}^\dagger(x;a)T \ , & \text{(3.94a)} \\ \mathscr{A}_-(x;a) := T^{-1}\mathcal{A}(x;a) \ . & \text{(3.94b)} \end{cases}$$

これらの演算子を用いれば，式 (2.48) は更に，

$$[\mathscr{A}_-(x;a), \mathscr{A}_+(x;a)] = \widetilde{R}(a) \tag{3.95}$$

という交換関係の形に書き換えられる．

2.4 節と同様に，ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}, \mathcal{H}^{[1]}, \ldots$ を定義する：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{[0]} &:= \mathscr{A}_+(x;a)\mathscr{A}_-(x;a) \ , \\
\mathcal{H}^{[1]} &:= \mathscr{A}_-(x;f(a))\mathscr{A}_+(x;f(a)) = \mathscr{A}_+(x;f(a))\mathscr{A}_-(x;f(a)) + \widetilde{R}(f(a)) \\
&\ \ \vdots \\
\mathcal{H}^{[n]} &:= \mathscr{A}_-(x;f^n(a))\mathscr{A}_+(x;f^n(a)) + \sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{R}(f^i(a)) \\
&= \mathscr{A}_+(x;f^n(a))\mathscr{A}_-(x;f^n(a)) + \sum_{i=1}^{n}\widetilde{R}(f^i(a)) \ .
\end{aligned} \tag{3.96}$$

[註10] 定義式から分かるように，$\mathscr{A}_\pm$ は互いに Hermite 共軛な演算子ではない．

ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ の固有値と固有函数は，まず基底状態に対して，

$$\mathcal{E}_0(a) = 0 \ , \quad |\phi_0(x;a)\rangle \propto \exp\left[-\int^x W(\bar{x};a)\,\mathrm{d}\bar{x}\right] \tag{3.97}$$

と書け，励起状態に対しては，

$$\mathcal{E}_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{R}(f^i(a)) \ , \quad |\phi_n(x;a)\rangle \propto [\mathscr{A}_+(x;a)]^n\,|\phi_0(x;a)\rangle \tag{3.98}$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n-1} \mathcal{A}^\dagger(f^i(a))\right] |\phi_0(x;f^i(a))\rangle \ .$$

である．ただし，

$$\mathcal{A}(x;a)\,|\phi_0(x;a)\rangle = T\mathscr{A}_-(x;a)\,|\phi_0(x;a)\rangle = 0 \qquad \therefore \quad \mathscr{A}_-(x;a)\,|\phi_0(x;a)\rangle = 0 \ , \tag{3.99}$$

$$\mathscr{A}_-(x;f^j(a))\,|\phi_0(x;f^j(a))\rangle = 0 \tag{3.100}$$

である．式 (3.98) は，次のようにして，確認することができる：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{[0]}\,|\phi_n(x;a)\rangle &= \mathcal{H}^{[0]}\,[\mathscr{A}_+(x;a)]^n\,|\phi_0(x;a)\rangle \\
&= [\mathscr{A}_+(x;a)]^n \underbrace{\mathcal{H}^{[0]}\,|\phi_0(x;a)\rangle}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{R}(f^k(a))\,[\mathscr{A}_+(x;a)]^n\,|\phi_0(x;a)\rangle \\
&= \mathcal{E}_n(a)\,[\mathscr{A}_+(x;a)]^n\,|\phi_0(x;a)\rangle \ .
\end{aligned} \tag{3.101}$$

ただし，1 行目から 2 行目への変形では，交換関係：

$$\left[\mathcal{H}^{[0]}, [\mathscr{A}_+(x;a)]^n\right] = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{R}(f^i(a))\,[\mathscr{A}_+(x;a)]^n \ , \tag{3.102}$$

を用いた．

以上で議論してきた，ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$, $\mathcal{H}^{[1]}$, ... のスペクトルと演算子 $\mathcal{A}$, T, $\mathscr{A}$ などの作用を図示すると，図 3.1 のようになる．

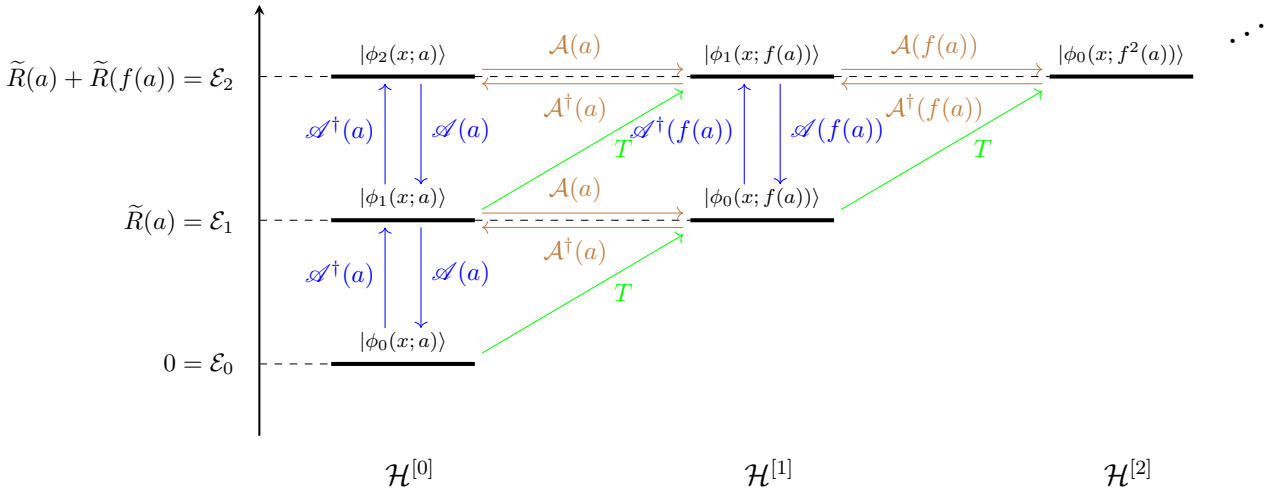


図 3.1　形状不変系のスペクトル構造と演算子．

3.3.2　軌道角運動量の代数構造と形状不変系

本小節では，軌道角運動量の代数構造と形状不変系との関係をみてゆくことにする．即ち，代数の生成子 $L_\pm$ から，形状不変系のひとつである $1/\cosh^2 x$（ソリトン）ポテンシャルが得られることを確認する．

よく知られているように，角運動量の代数構造は，

$$\begin{cases} L_\pm = \pm \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi} \left(\dfrac{\partial}{\partial \theta} \pm \mathrm{i} \cot\theta \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \right) & \text{(3.103a)} \\ L_3 = \dfrac{1}{\mathrm{i}} \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \text{(3.103b)} \end{cases}$$

で定義される 3 つの生成子 $L_\pm$, L_3 を用いて，

$$[L_+, L_-] = 2L_3 \ , \quad [L_3, L_\pm] = \pm L_\pm \tag{3.104}$$

である．ここで，1 次元調和振動子の代数的解法における 3 つの演算子 $a^\dagger$, a, N が成す代数構造 (1.14) の類推[註11]から，“ハミルトニアン”を L_+L_- で定義する：

$$\begin{aligned} L_+L_- &= \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \right] \right\} \left\{ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \right] \right\} \\ &= -\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot^2\theta \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right)^2 + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right] \ . \end{aligned} \tag{3.105}$$

“ハミルトニアン” L_+L_- を函数 $\Theta(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ に作用させると，

$$L_+L_-\Theta(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = -\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - m^2\cot^2\theta - m \right] \Theta(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{3.106}$$

を得る．

ここで，θ による 1 階微分の項を消すような変数変換：$\theta \to z = z(\theta)$，を考えると，

$$z(\theta) = \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \tag{3.107}$$

とすればよいことが分かる．このとき，変数の定義域は，$\theta \in (0, \pi)$ から $z \in (-\infty, \infty)$ に変わっている．また，生成子は，

$$\begin{cases} L_\pm = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \left(-\mathrm{i}\sinh z \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \pm \cosh z \dfrac{\partial}{\partial z} \right) & \text{(3.108a)} \\ L_3 = \dfrac{1}{\mathrm{i}} \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \text{(3.103b)} \end{cases}$$

[註11] 以下の対応関係がある：

$$\hat{a}^\dagger \longleftrightarrow L_+ \ , \quad \hat{a} \longleftrightarrow L_- \ , \quad \hat{n} \longleftrightarrow \text{“ハミルトニアン”} \ .$$

と書かれ，式 (3.105) は，

$$L_+L_- = -\cosh^2 z\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sinh^2 z\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.109}$$

となる．この“ハミルトニアン”に対する固有値方程式は，固有値を η，固有函数を $\psi(z,\varphi)$ と書けば，

$$\left[-\cosh^2 z\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sinh^2 z\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]\Psi(z,\varphi) = \eta\Psi(z,\varphi) \tag{3.110}$$

である．変数分離形を仮定して，$\Psi(z,\varphi) \equiv \psi(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ とおくと，この状態に対する L_3 の固有値は m と書け，更に L^2 の固有値を $\ell(\ell+1)$ と書けば，

$$L_+L_- = L^2 - {L_3}^2 + L_3 \quad \longleftrightarrow \quad \eta = \ell(\ell+1) - m^2 + m$$

であり，固有値方程式 (3.110) は，

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \ell(\ell+1)\,\mathrm{sech}^{\,2} z\right]\psi(z) = -m^2\psi(z) \tag{3.111}$$

となる．$-\ell(\ell+1)\,\mathrm{sech}^{\,2} z$ の項を“ポテンシャル”と解釈すれば，式 (3.111) は，形状不変系のひとつである $1/\cosh^2 x$（ソリトン）ポテンシャルに対する Schrödinger 方程式 (3.61) と同じ形である．つまり，形状不変系である $1/\cosh^2 x$（ソリトン）ポテンシャルは，軌道角運動量の代数構造をもつことが分かる（図 3.2 参照）．

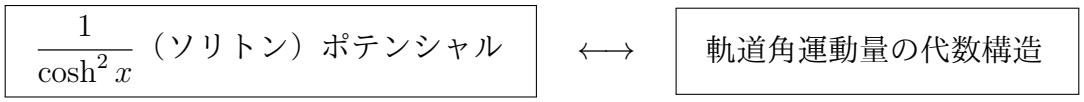


図 3.2　軌道角運動量の代数構造をもつ形状不変系．

3.3.3　形状不変系の代数構造

本小節では，A. Gangopadhyaya らの方法 [57, 58, 59, 60] に従って，3.3.1 節における T や $\mathscr{A}_\pm$ などに対応する演算子の具体的な表現を求めてゆく．

■　代数構造と生成子

前小節での議論を応用し，一般の形状不変系がもつ代数構造を議論する．具体的には，軌道角運動量の場合の類推で図 3.3 中の ？ に当てはまる代数構造の表現を得ることが，本小節の目標である．

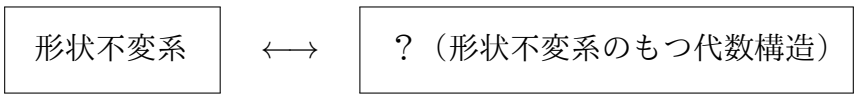


図 3.3　形状不変系とその代数構造．

形状不変性の条件式 (2.48) は，次のように書き換えることができる：

$$\mathcal{A}^\dagger(x;f(a))\mathcal{A}(x;f(a)) - \mathcal{A}(x;a)\mathcal{A}^\dagger(x;a) = -R(a)\ . \tag{3.112}$$

これは，交換関係の表式に似ている．ただし，本小節では，$f(a) = a + d$ の場合のみを考えることにする．式 (3.112) は，$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\dagger$ を用いた生成子が，代数を成していることを示唆している．その代数構造が，前小節での議論の類推から，

$$[J_+, J_-] = F(J_3)\ , \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm\ . \tag{3.113}$$

であると仮定する．$F(J_3) = 2J_3$ のとき，前小節の議論 (3.104) になる．後に示すように，$F(J_3)$ は $R(a)$ に対応するものである．

以上を踏まえて，生成子 $J_\pm$ を

$$J_+ \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi d}\mathcal{A}^\dagger\ , \quad J_- \coloneqq (J_+)^\dagger = \mathcal{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d} \tag{3.114}$$

と定義する．ここで，φ は x とは独立な変数である．(3.113) 第 1 式の交換関係が，形状不変性の条件式 (3.112) の形になるためには，a を

$$a \to \mathrm{i}\partial_\varphi \tag{3.115}$$

と置き換えればよい．ただし，$\mathrm{i}\partial_\varphi \equiv \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ である．

このとき，式 (3.112) の左辺は，J_+ と J_- の交換関係で次のように書かれる：

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &\equiv J_+J_- - J_-J_+ \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi d}\mathcal{A}^\dagger(x;\mathrm{i}\partial_\varphi)\mathcal{A}(x;\mathrm{i}\partial_\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d} - \mathcal{A}(x;\mathrm{i}\partial_\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}d\varphi d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi d}\mathcal{A}^\dagger(x;\mathrm{i}\partial_\varphi) \\
&= \mathcal{A}^\dagger(x;\mathrm{i}\partial_\varphi + d)\mathcal{A}(x;\mathrm{i}\partial_\varphi + d) - \mathcal{A}(x;\mathrm{i}\partial_\varphi)\mathcal{A}^\dagger(x;\mathrm{i}\partial_\varphi)\ .
\end{aligned} \tag{3.116}$$

ただし，2 行目から 3 行目の式変形では，

$$\mathrm{i}\partial_\varphi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d}(\mathrm{i}\partial_\varphi + d) \tag{3.117}$$

であることを用いた．また，式 (3.112) と式 (3.116) とを比較すると，$a \leftrightarrow \mathrm{i}\partial_\varphi$ に加えて，

$$f(a) = a + d \leftrightarrow \mathrm{i}\partial_\varphi + d$$

という対応関係（置き換え）が成り立つ．他方，式 (3.112) の右辺は，$-R(\mathrm{i}\partial_\varphi)$ と置き換えられる．

次に，演算子 J_3 の具体的な表現を求めてゆく．その際，式 (3.117) を交換関係を用いて書いた

$$\left[-\frac{\mathrm{i}}{d}\partial_\varphi, \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi d}\right] = \pm\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi d}\ , \tag{3.118}$$

から考えることにする．$J_\pm \propto \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi d}$ であることから，式 (3.118) は，(3.113) の第 2 式と似た形をしている．そこで，J_3 を

$$J_3 \coloneqq -\frac{\mathrm{i}}{d}\partial_\varphi \tag{3.119}$$

で定義すれば，式 (3.118) は，

$$\left[J_3, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi d}\right] = \pm \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi d} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \left[J_3, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi d}\mathcal{A}^\dagger\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi d}\mathcal{A}^\dagger \\ \left[J_3, \mathcal{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d}\right] = -\mathcal{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d} \end{cases} \tag{3.120}$$

となり，(3.113) の第 2 式を満たすことが確認できる．

また，(3.113) の第 1 式は，$\mathrm{i}\partial_\varphi = -dJ_3$ であることから，

$$[J_+, J_-] = -R(\mathrm{i}\partial_\varphi) = -R(-dJ_3) \equiv F(J_3)$$

とおくことで，満たされる．

以上を纏めると，形状不変系は次の代数構造をもつといえる：

形状不変系の代数構造． ある形状不変系：

$$\mathcal{A}(x;a)\mathcal{A}^\dagger(x;a) = \mathcal{A}^\dagger(x;f(a))\mathcal{A}(x;f(a)) + R(a)\ , \quad f(a) = a + d$$

は，次の代数構造をもつ．

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm\ , \quad [J_+, J_-] = F(J_3)$$

ただし，代数の生成子 $J_\pm$, J_3 は，

$$\begin{cases} J_+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi d}\mathcal{A}^\dagger(x;\mathrm{i}\partial_\varphi) \\ J_- = \mathcal{A}(x;\mathrm{i}\partial_\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi d} \\ J_3 = -\dfrac{\mathrm{i}}{d}\partial_\varphi \end{cases}$$

であり，F は，

$$F(J_3) = -R(-dJ_3)$$

で与えられる．

■ 代数構造を用いたエネルギーの計算

本項では，前小節の代数構造を用いて，系 $\mathcal{H}_-(x;a)$ のエネルギーを求める方法を導入する．$J_\pm$ の積：

$$J_+J_- = \mathcal{A}^\dagger(x;\mathrm{i}\partial_\varphi + d)\mathcal{A}(x;\mathrm{i}\partial_\varphi + d) \equiv \mathcal{H}_-(x;\mathrm{i}\partial_\varphi + d)\ , \tag{3.121}$$

は，代数の生成子を用いて書き下したハミルトニアン $\mathcal{H}_-(x;f(a))$ であるとみることができる．ここで，J_3 の固有値を m とする．J_3 の固有状態は，$|m\rangle \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi d}$ と書かれる：

$$J_3\,|m\rangle = m\,|m\rangle\ . \tag{3.122}$$

J_3 の固有状態を用いれば，系 $\mathcal{H}_-(x;a)$ のエネルギー $\mathcal{E}(m)$ は，

$$\mathcal{E}(m) = \langle m|\,J_+J_-\,|m\rangle \tag{3.123}$$

で求めることができる．

この代数の Casimir 演算子 C[註12] は，

$$C \coloneqq J_- J_+ + G(J_3) = J_+ J_- + G(J_3 - 1) \tag{3.124}$$

である．ただし，G は，$F = [J_+, J_-]$ と

$$F(J_3) = G(J_3) - G(J_3 - 1) \tag{3.125}$$

なる関係にある．前小節の軌道角運動量演算子の例では，$F(J_3) = 2J_3$ であったので，

$$G(J_3) = {J_3}^2 + J_3 \ , \tag{3.126}$$

$$C = J_- J_+ + {J_3}^2 + J_3 \equiv J^2 \tag{3.127}$$

と求まる．

計算すれば分かるように，この代数においては，J_3 とハミルトニアン $J_+ J_-$ とが同時固有状態になっていない．そこで，式 (3.124) で定義される Casimir 演算子を用いて系 $\mathcal{H}_-(x; a)$ のエネルギーを計算する方法を考える．$\{|m\rangle\}$ で張られる空間に対して，演算子 $J_\pm$ は，それぞれ昇降演算子として作用する．係数 $\kappa(m)$ を適当に採って，

$$\begin{cases} J_+ |m\rangle = \kappa^*(m+1) |m+1\rangle \ , & \text{(3.128a)} \\ J_- |m\rangle = \kappa(m) |m-1\rangle \ . & \text{(3.128b)} \end{cases}$$

式 (3.128) の Hermite 共軛をとると，

$$\begin{cases} \langle m| J_- = \kappa(m+1) \langle m+1| \ , & \text{(3.129a)} \\ \langle m| J_+ = \kappa^*(m) \langle m-1| \ . & \text{(3.129b)} \end{cases}$$

なので，

$$\begin{cases} \langle m| J_- J_+ |m\rangle = |\kappa(m+1)|^2 \ , & \text{(3.130a)} \\ \langle m| J_+ J_- |m\rangle = |\kappa(m)|^2 \ . & \text{(3.130b)} \end{cases}$$

を得る．式 (3.124) を用いて $\langle m| C |m\rangle$ を計算することで，

$$|\kappa(m+1)|^2 - |\kappa(m)|^2 = G(m-1) - G(m) \tag{3.131}$$

と分かる．

ここで，m の最小値を $m_{\min}$ とすると，

$$J_- |m_{\min}\rangle = \kappa(m_{\min}) |m_{\min} - 1\rangle \equiv 0$$

なので，

$$\kappa(m_{\min}) = 0 \tag{3.132}$$

と求まる．式 (3.131) より，

$$|\kappa(m_{\min} + 1)|^2 = G(m_{\min} - 1) - G(m_{\min})$$

[註12] 代数の全ての生成子と可換な演算子を，Casimir 演算子という．

と書け，これを繰り返し用いることにより，任意の n ($\in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$) に対して，

$$|\kappa(m_{\min}+n)|^2 = G(m_{\min}-1) - G(m_{\min}+n-1)$$

と書ける．$m_{\min}+n$ を m と書くことにすれば，

$$|\kappa(m)|^2 = G(m-n-1) - G(m-1)\ . \tag{3.133}$$

従って，式 (3.123), (3.130b) より，系 $\mathcal{H}_-(x;a)$ のエネルギー $\mathcal{E}_n(m)$ は，

$$\mathcal{E}_n(m) = |\kappa(m)|^2 = G(m-n-1) - G(m-1) = -\sum_{i=0}^{n-1} F(m-i-1) \tag{3.134}$$

と求めることができる．

■ 例：動径振動子

本項では，動径振動子の系に対して，その代数構造をみてゆく．この場合，形状不変のパラメータは g であり，形状不変変換によって $g \to g+1$ と変換されることから，$d=1$ で J_3 の固有値は $-g-n$ である．動径振動子のもつ代数の生成子は，

$$\begin{cases} J_+ \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(-\partial_x + \omega x - \dfrac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right)\ , & \text{(3.135a)} \\ J_- \coloneqq \left(\partial_x + \omega x - \dfrac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\ , & \text{(3.135b)} \\ J_3 \coloneqq -\mathrm{i}\partial_\varphi & \text{(3.135c)} \end{cases}$$

と書かれる．勿論，∂_x は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ の意味である．

ここで，$J_\pm$ の交換関係の計算を行う．

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(-\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right)\left(\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\
&\qquad - \left(\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(-\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(-\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi + 1}{x}\right)\left(\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi + 1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\
&\qquad - \left(\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right)\left(-\partial_x + \omega x - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi}{x}\right) \\
&= -{\partial_x}^2 + \omega^2 x^2 + \frac{(\mathrm{i}\partial_\varphi + 1)(\mathrm{i}\partial_\varphi + 1 - 1)}{x^2} - \omega[2(\mathrm{i}\partial_\varphi + 1) + 1] \\
&\qquad + {\partial_x}^2 - \omega^2 x^2 - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi(\mathrm{i}\partial_\varphi + 1)}{x^2} + \omega(2\mathrm{i}\partial_\varphi - 1) \\
&= \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi(\mathrm{i}\partial_\varphi) + 1)}{x^2} - \frac{\mathrm{i}\partial_\varphi(\mathrm{i}\partial_\varphi + 1)}{x^2} - \omega(2\mathrm{i}\partial_\varphi + 3) + \omega(2\mathrm{i}\partial_\varphi - 1) \\
&= -4\omega \equiv F(J_3)\ .
\end{aligned} \tag{3.136}$$

従って，式 (3.134) から，系のエネルギーは，

$$\mathcal{E}_n = \sum_{i=0}^{n-1} 4\omega = 4n\omega \tag{3.137}$$

と求まる．

3.4 新しい形状不変系たち

形状不変性の条件式 (2.48) を満たす系は，3.2 節で示したもの以外にも知られている．3.2 節で挙げたものは，ポテンシャルとその解自体は，文献 [2] の時代には知られていたもので，その意味で“古い”形状不変系である．本節では，3.2 節で示したもの以外の“新しい”形状不変系の例をふたつ挙げる．ひとつは，乗算型とよばれるもの（3.4.1 節）で，もうひとつは，多添字系（3.4.2 節）である．

尚，3.2 節に挙げた“古い”形状不変系のみを指す場合，古典的な (conventional) 形状不変系という呼称が用いられる．

3.4.1 乗算型の形状不変系

ここまでに示してきた形状不変系は，いずれも，パラメータの変換が加算型：

$$a \to f(a) = a + d$$

のものであった（d は定数）．このような形状不変系は，加算型の (additive, translational) 形状不変系とよばれることもある．

パラメータの変換は，これ以外にもあり得て，特に q 変形との関連から，1993 年以降，パラメータが乗算型：

$$a \to f(a) = qa$$

の変換をするものが見つかり，議論されるようになった（q は定数）[28]．このような乗算型の (scaling) 形状不変系は，例えばスーパーポテンシャルがパラメータ a の冪級数：

$$W(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) a^i \ , \tag{3.138}$$

で書かれることを仮定して構成される．乗算型の場合にも，パラメータの対数をとることで，加算型のものに帰着される：

$$\ln a \to \ln f(a) = \ln a + \ln q \ .$$

しかしながら，乗算型の形状不変系は，パラメータ a の役割が古典的な形状不変系とは異なり，両者は別々に分類されるべきものである．

本研究では，この系に関する計算は行なっていないため，これ以上は立ち入らないことにする．

3.4.2　多添字系

2008 年に D. Gómez-Ullate らによって，2 階の微分方程式を満たす新たな直交多項式である[註13]例外直交多項式 (exceptional orthogonal polynomial) が構成された [30].「例外」ということの意味は，Hilbert 空間の完全系をなすものの，0 次式が存在せず 1 次式から始まる，即ち多項式の次数に欠落がある，ということである．このことを反映して，X_1-Laguerre, X_1-Jacobi 多項式ともよばれる．同年，C. Quesne によって，例外多項式を固有函数の主要部にもつ 1 次元の量子力学系が構成された [32]．この系が形状不変性をもつことは，直接計算によって確かめられる．翌年には，小竹らによって，任意の自然数 ℓ に対して ℓ 次式から始まる X_ℓ-Laguerre, X_ℓ-Jacobi 多項式へと拡張された [33, 35]．これまでに高々数十個程度しか知られていなかった形状不変系であるが，この段階でその個数は可算無限個まで一気に増えた．

2011 年には，小竹らによって，更なる一般化が行われ [36]，これを多添字直交多項式 (multi-indexed orthogonal polynomial) とよぶ．この構成法及びこの多項式を固有函数の主要部にもつ 1 次元の量子力学系については，4.4 節で詳しく述べる．

[註13] 次の Bochner の定理が知られている：

> **Bochner の定理 [61, 62].** 直交多項式 $P_n(\eta)$, $\deg P_n = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が 2 階微分方程式
>
> $$p(\eta)P_n''(\eta) + q(\eta)P_n'(\eta) + r(\eta)P_n(\eta) = \lambda_n P_n(\eta)$$
>
> を満たすならば，それは Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel 多項式のいずれかである．

これは，所謂「no-go 定理」である．仮定を変える試みとして，

I. 2 階微分方程式を高階微分方程式に置き換える，

II. 2 階微分方程式を 2 階差分方程式に置き換える，

III. 次数に欠落を許す，

が考えられる．ここで考えるのは，III. である．

第4章

新たな可解系たち

本章では，3.2 節に示した形状不変系から構成される，新たな可解系たちを紹介する．新たな可解系の構成法は，多くの場合，$\hbar = 1$ なる単位系の下で議論されてきた．しかし，本論文は $\hbar$ の依存性を正しく考慮することが主題のひとつなので，$\hbar$ を陽に含んだ形の定式化を行う．その際の注意点は，4.1 節で述べる．

それ以降の本章の構成は，以下の通り．まず，4.2 節では，Darboux 変換とよばれる，ハミルトニアンの等スペクトル変形の一般論を述べる．Darboux 変換を用いて構成される系の代表例として，4.3 節では Krein–Adler 系を，4.4 節では多添字系をそれぞれ扱う．続いて，Darboux 変換を用いずに構成される新たな可解系として，4.5 節では条件付き可解系を扱う．また，4.6 節では，形状不変性の概念を，質量が位置に依存する場合に拡張した議論を行う．拡張された形状不変系を手掛かりに，質量が位置に依存するような状況下での可解系が構築される．

4.1 一般的注意

新たな可解系の構築は，しばしば，$\hbar = 1$ として行われてきた．そして，これまで，$\hbar = 1$，即ち「$\hbar$ を陽に含まない形状不変系」から「$\hbar$ を陽に含まない新たな系」を構築する方法が様々調べられてきた．$\hbar$ を陽に含んだ定式化は，物理量の次元に気を付けさえすれば，正しく行うことができる．しかしながら，この点で誤った先行研究が（一流雑誌に載っているものの中にも）数多く見受けられる[註14]．そこで，まず初めに，$\hbar$ を陽に含んだ可解系を構築する際の一般的注意を述べる．

$\hbar$ を陽に含んだ定式化が正しいか否かは，図 4.1 に示す 2 通りの構成法が等価であることを確認すれば分かる．つまり，物理量の次元に注意しながら，直接「$\hbar$ を陽に含んだ形状不変系」から「$\hbar$ を陽に含んだ新たな可解系」の構築を行う（経路 I）ほかに，図 4.1 の経路 II，即ち変数変換などで一旦「$\hbar$ を陽に含まない形状不変系」に書き直してから新たな可解系の構築を行い，再度変数変換などで「$\hbar$ を陽に含んだ新たな可解系」を書き下す，という方法を試し，両者が同一のものになっているか確かめるとよい．

[註14] 5.3.3 節で詳しく述べる．

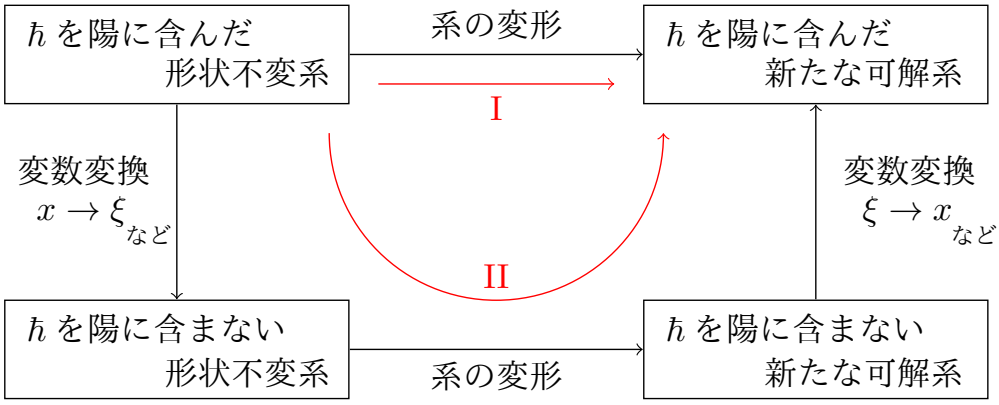


図 4.1　$\hbar$ を陽に含んだ新たな可解系の定式化の手順.

4.2　Darboux 変換

4.2.1　Darboux 変換

2.4 節で Darboux–Crum 変換をみた．本節では，この一般の場合である Darboux 変換について説明する．Darboux 変換は，ある Schrödinger 方程式：

$$\mathcal{H}\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x)$$

の任意の解 $\varphi(x)$（種解 (seed solutions)）を用いて，この系を，これと等スペクトルな別の系に写す．一般の Darboux 変換では，量子力学で課される境界条件や 2 乗可積分性などの制約を課す必要がないため，$\varphi(x)$ は $\mathcal{H}$ の固有函数でなくても良いし，“$\mathcal{E}$” が一般に複素数であっても良い．$\varphi(x)$ を $\mathcal{H}$ の固有函数のうち最低固有値のものを選んだときが，Darboux–Crum 変換の場合である．

種解 $\varphi(x)$：

$$\mathcal{H}\varphi(x) = \widetilde{\mathcal{E}}\varphi(x)\ , \tag{4.1}$$

を用いて，$\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \hbar^2\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right) + \widetilde{\mathcal{E}} \equiv \hbar^2\mathcal{A}_\varphi^\dagger\mathcal{A}_\varphi + \widetilde{\mathcal{E}} \tag{4.2}$$

のように形式的に因子化する．このとき，ポテンシャルは，種解 $\varphi(x)$ を用いて，

$$V(x) = \hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln|\varphi(x)|\right] \tag{4.3}$$

とも書かれる．式 (4.2) における $\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\varphi^\dagger$ の順序を入れ替えて，新たなハミルトニアン $\mathcal{H}_{\{1\}}$ を定義する：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\{1\}} \coloneqq \hbar^2\mathcal{A}_\varphi\mathcal{A}_\varphi^\dagger + \widetilde{\mathcal{E}} &= \hbar^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right) + \widetilde{\mathcal{E}} \\ &= -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \hbar^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right)^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln|\varphi(x)|\right] \\ &= \mathcal{H} - 2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln|\varphi(x)|\ .\end{aligned} \tag{4.4}$$

このハミルトニアンは，

$$\mathcal{H}_{\{1\}}\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_\varphi\mathcal{H}\ , \quad \mathcal{A}_\varphi^\dagger\mathcal{H}_{\{1\}} = \mathcal{H}\mathcal{A}_\varphi^\dagger \tag{4.5}$$

なる絡み合わせ関係式を満たす．従って，

$$\mathcal{H}_{\{1\}}\mathcal{A}_\varphi\psi_n(x) = \mathcal{A}_\varphi\mathcal{H}\psi_n(x) = \mathcal{E}_n\mathcal{A}_\varphi\psi_n(x) \tag{4.6}$$

より，$\mathcal{H}_{\{1\}}$ は $\{\mathcal{A}_\varphi\psi_n(x)\}$ を固有函数にもつことが分かる．ただし，$\mathcal{A}_\varphi\psi_n(x)$ は，ロンスキアンを用いて，

$$\mathcal{A}_\varphi\psi_n(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right)\psi_n(x) = \frac{\mathrm{W}[\varphi,\psi_n](x)}{\varphi(x)} \tag{4.7}$$

と表される．

また，式 (4.4) の Darboux 変換を施すことは，$\varphi(x)$ に対応する状態を削除した新たな系を構築することに対応する．このことは，

$$\mathcal{A}_\varphi\varphi(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\varphi(x)|\right)\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{4.8}$$

によって，容易に確かめられる．

4.2.2 多重 Darboux 変換

$\mathcal{D} \coloneqq \{d_1, d_2, \ldots, d_M\}$ で指定される M 個の種解 $\varphi_{d_j}(x)$：

$$\mathcal{H}\varphi_{d_j}(x) = \widetilde{\mathcal{E}}\varphi_{d_j}(x)\ , \quad j = 1, 2, \ldots, M\ , \tag{4.9}$$

に対して，前小節で導入した Darboux 変換を繰り返し施す．このとき，この変換は多重 Darboux 変換とよばれ，新たに構成される系 $\mathcal{H}_\mathcal{D}$ は，

$$\mathcal{H}_\mathcal{D} \coloneqq \mathcal{H} - 2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1}, \ldots, \varphi_{d_M}\right](x) \tag{4.10}$$

と定義される．また，$\mathcal{H}_\mathcal{D}$ に対する Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}_\mathcal{D}\psi_{\mathcal{D},n}(x) = \mathcal{E}_n\psi_{\mathcal{D},n}(x) \tag{4.11}$$

と書かれ，固有値 $\mathcal{E}_n$ に属する固有函数は，

$$\psi_{\mathcal{D},n}(x) \coloneqq \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1}, \ldots, \varphi_{d_M}, \psi_n\right](x)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1}, \ldots, \varphi_{d_M}\right](x)} \tag{4.12}$$

で与えられる．

4.2.3 Darboux 変換によって構成される系

Darboux 変換（または，多重 Darboux 変換）によって得られる新たな量子力学系を，以下の 2 節で紹介する．ここでは，その前段階として，概観の説明を与える．

種解 $\varphi_{d_j}(x)$ の選び方として，本章では次の 2 通りを考える：

- 元の系の固有状態 $\psi_n(x)$ から選ぶ．
- 仮想状態（4.4.1 節参照）$\tilde{\phi}_\mathrm{v}(x)$ から選ぶ．

前者の場合で得られる系は Krein–Adler 系とよばれ，4.3 節で扱う．また，後者から得られる系は多添字系とよばれ，4.4 節で扱う．

4.3 Krein–Adler 系

4.3.1 一般論

式 (4.10), (4.12) で表される多重 Darboux 変換において，$\varphi_{d_j}(x)$ として，元の系 $\mathcal{H}$ の固有状態 $\{\psi_n(x)\}$ から選ぶ場合を考える．これは，Crum の定理の拡張で，Krein–Adler 変換 [37, 38] とよばれる．このようにして構成される系は，Krein–Adler 系とよばれ，元の系から，選ばれた固有状態に対応する準位が削除されたような系が得られる．

ここで，Crum の定理と Krein–Adler 変換の違いを整理しておく．Crum の定理では，元のハミルトニアン $\mathcal{H}$ から最も低いエネルギー準位を次々と削除してゆくのに対して，Krein–Adler 変換は，非負整数の集合 $\mathcal{D}$ で指定された有限個の準位を削除した系を構成する．ただし，集合 $\mathcal{D}$ の要素たちは，

$$\prod_{j=1}^{M}(n-d_j)\geqslant 0\ ,\quad \forall n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \tag{4.13}$$

を満たすように選ぶ．式 (4.13) の条件は，新たに構成された系の固有函数系 $\{\psi_{\mathcal{D},n}(x)\}$ のノルム：

$$(\psi_{\mathcal{D},n},\psi_{\mathcal{D},m})=\prod_{j=1}^{M}(\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_{d_j})\cdot(\psi_n,\psi_m)\ ,\quad n,m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\backslash\mathcal{D} \tag{4.14}$$

の正値性から得られる．式 (4.13) を満たす非負整数の集合 $\mathcal{D}$ として，以下のふたつが考えられる：

- 隣り合った 2 個の整数の組たち：$\mathcal{D}=\{\ell_1,\ \ell_1+1<\ell_2,\ \ell_2+1,\ \ldots,\ \ell_{M/2},\ \ell_{M/2}+1\}$,
- 0 から任意個の連続する整数たち：$\mathcal{D}=\{0,\ 1,\ \ldots,\ M-1\}$.

特に後者は，Crum の定理の場合である．Krein–Adler 系という場合，ふつう，前者で構成される系のみを指す．

Krein–Adler 系のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{KA})}$ は，式 (4.10) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{KA})}:=\mathcal{H}-2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\left|\mathrm{W}\left[\psi_{d_1},\ldots,\psi_{d_M}\right](x)\right| \tag{4.15}$$

と書かれる．また，$\breve{n}\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\backslash\mathcal{D}$ として，Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{KA})}\psi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}(x)=\mathcal{E}_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}\psi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}(x) \tag{4.16}$$

と書かれる．ただし，

$$\psi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}(x)=\frac{\mathrm{W}\left[\psi_{d_1},\ldots,\psi_{d_M},\psi_{\breve{n}}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\psi_{d_1},\ldots,\psi_{d_M}\right](x)} \tag{4.17}$$

は，固有値 $\mathcal{E}_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}=\mathcal{E}_{\breve{n}}$ に属する固有函数である．尚，Krein–Adler 系は，形状不変性をもたない．

4.3.2 例

以下では，簡単のため，$\mathcal{D} = \{d, d+1\}$ $(d \neq 0)$ の場合のみを考える．新たに構築される系では，元の系の d 番目と $d+1$ 番目に対応する準位が削除されている．この場合，式 (4.15)–(4.17) は，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{KA})} \coloneqq \mathcal{H} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \left| \mathrm{W}\left[\psi_d, \psi_{d+1}\right](x) \right| \ , \quad \mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{KA})} \psi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}(x) = \mathcal{E}_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})} \psi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}(x) \ , \tag{4.18}$$

$$\psi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{KA})}(x) = \frac{\mathrm{W}\left[\psi_d, \psi_{d+1}, \psi_{\breve{n}}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\psi_d, \psi_{d+1}\right](x)} \tag{4.19}$$

となる．ただし，

$$\breve{n} \coloneqq \begin{cases} n & (0 \leqslant n \leqslant d-1) \\ n+2 & (n \geqslant d) \end{cases} \ , \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \tag{4.20}$$

である．

また，本小節で挙げる例では，いずれも，元の系 $\mathcal{H}$ として 3.2.1–3.2.3 節に示した 3 つ古典的な形状不変系を選ぶことにする．

■ 1 次元調和振動子の場合 (H)

元の系として 1 次元調和振動子 (3.6)：

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{H})} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 - \hbar\omega \ , \quad \mathcal{H}^{(\mathrm{H})} \phi_n^{(\mathrm{H})}(x) = \mathcal{E}_n^{(\mathrm{H})} \phi_n^{(\mathrm{H})}(x) \ ,$$

を選ぶと，これから構成される Krein–Adler 系のハミルトニアンは，式 (4.18) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K,H})} \coloneqq \mathcal{H}^{(\mathrm{H})} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \left| \mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{H})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{H})}\right](x) \right| \tag{4.21}$$

と書かれる．$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K,H})}$ の固有値と固有函数は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{K,H})} = \mathcal{E}_{\breve{n}}^{(\mathrm{H})} = 2\breve{n}\hbar\omega \ , \tag{4.22}$$

$$\phi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{K,H})}(x) = \frac{\mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{H})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{H})}, \phi_{\breve{n}}^{(\mathrm{H})}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{H})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{H})}\right](x)} \tag{4.23}$$

である．$\xi \equiv \sqrt{\omega/\hbar}\, x$ とすると，式 (4.23) は，

$$\phi_{\mathcal{D},\breve{n}}^{(\mathrm{K,H})}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[H_d, H_{d+1}, H_{\breve{n}}\right](\xi)}{\mathrm{W}\left[H_d, H_{d+1}\right](\xi)} \tag{4.24}$$

と変形される．ただし，式 (A.2), (A.3) を用いた．特に，基底状態波動函数は，

$$\phi_{\mathcal{D},0}^{(\mathrm{K,H})}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[H_d, H_{d+1}, 1\right](\xi)}{\mathrm{W}\left[H_d, H_{d+1}\right](\xi)} \tag{4.25}$$

である．

■ **動径振動子の場合 (L)**

元の系として動径振動子 (3.14)：

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{L})} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} - \hbar\omega(2g+1) \ , \quad \mathcal{H}^{(\mathrm{L})}\phi_n^{(\mathrm{L})}(x) = \mathcal{E}_n^{(\mathrm{L})}\phi_n^{(\mathrm{L})}(x) \ ,$$

を選ぶと，これから構成される Krein–Adler 系のハミルトニアンは，式 (4.18) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K,L})} \coloneqq \mathcal{H}^{(\mathrm{L})} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \left| \mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{L})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{L})}\right](x) \right| \tag{4.26}$$

と書かれる．$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K,L})}$ の固有値と固有函数は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D},\check{n}}^{(\mathrm{K,L})} = \mathcal{E}_{\check{n}}^{(\mathrm{L})} = 4\check{n}\hbar\omega \ , \tag{4.27}$$

$$\phi_{\mathcal{D},\check{n}}^{(\mathrm{K,L})}(x) = \frac{\mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{L})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{L})}, \phi_{\check{n}}^{(\mathrm{L})}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{L})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{L})}\right](x)} \tag{4.28}$$

である．$z \equiv \xi^2$ とすると，式 (4.28) は，

$$\phi_{\mathcal{D},\check{n}}^{(\mathrm{K,L})}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{g+2}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[L_d^{(g-\frac{1}{2})}, L_{d+1}^{(g-\frac{1}{2})}, L_{\check{n}}^{(g-\frac{1}{2})}\right](z)}{\mathrm{W}\left[L_d^{(g-\frac{1}{2})}, L_{d+1}^{(g-\frac{1}{2})}\right](z)} \tag{4.29}$$

と変形される．ただし，式 (A.2), (A.3) を用いた．特に，基底状態波動函数は，

$$\phi_{\mathcal{D},0}^{(\mathrm{K,L})}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{g+2}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[L_d^{(g-\frac{1}{2})}, L_{d+1}^{(g-\frac{1}{2})}, 1\right](z)}{\mathrm{W}\left[L_d^{(g-\frac{1}{2})}, L_{d+1}^{(g-\frac{1}{2})}\right](z)} \tag{4.30}$$

である．

■ **Pöschl–Teller ポテンシャルの場合 (J)**

元の系として Pöschl–Teller ポテンシャル (3.22)：

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{J})} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2 h(h-1)}{\cos^2 x} - \hbar^2(g+h)^2 \ , \quad \mathcal{H}^{(\mathrm{J})}\phi_n^{(\mathrm{J})}(x) = \mathcal{E}_n^{(\mathrm{J})}\phi_n^{(\mathrm{J})}(x) \ ,$$

を選ぶと，これから構成される Krein–Adler 系のハミルトニアンは，式 (4.18) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K,J})} \coloneqq \mathcal{H}^{(\mathrm{J})} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \left| \mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{J})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{J})}\right](x) \right| \tag{4.31}$$

と書かれる．$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K,J})}$ の固有値と固有函数は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D},\check{n}}^{(\mathrm{K,J})} = \mathcal{E}_{\check{n}}^{(\mathrm{J})} = 4\hbar^2\check{n}(\check{n}+g+h) \ , \tag{4.32}$$

$$\phi_{\mathcal{D},\check{n}}^{(\mathrm{K,J})}(x) = \frac{\mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{J})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{J})}, \phi_{\check{n}}^{(\mathrm{J})}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\phi_d^{(\mathrm{J})}, \phi_{d+1}^{(\mathrm{J})}\right](x)} \tag{4.33}$$

である．$y \equiv \cos 2x$ とすると，式 (4.33) は，

$$\phi^{(\mathrm{K,J})}_{\mathcal{D},\check{n}}(x) = (1-y)^{\frac{g+2}{2}}(1+y)^{\frac{h+2}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[P_d^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}, P_{d+1}^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}, P_{\check{n}}^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}\right](y)}{\mathrm{W}\left[P_d^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}, P_{d+1}^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}\right](y)} \tag{4.34}$$

と変形される．ただし，式 (A.2), (A.3) を用いた．特に，基底状態波動函数は，

$$\phi^{(\mathrm{K,J})}_{\mathcal{D},0}(x) = (1-y)^{\frac{g+2}{2}}(1+y)^{\frac{h+2}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[P_d^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}, P_{d+1}^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}, 1\right](y)}{\mathrm{W}\left[P_d^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}, P_{d+1}^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}\right](y)} \tag{4.35}$$

である．

4.4 多添字系

4.4.1 一般論

式 (4.10), (4.12) で表される多重 Darboux 変換において，$\varphi_{d_j}(x)$ として，以下で説明する仮想状態 $\{\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)\}$ から選ぶ場合を考える．このようにして構成される系は，多添字系とよばれる．多添字系は，固有函数の主要部が，多添字 Laguerre 多項式，または多添字 Jacobi 多項式のいずれかで書かれており，これらの多項式は，その最も簡単な場合として，例外 Laguerre 多項式と例外 Jacobi 多項式をそれぞれ含んでいる．特に，波動函数の主要部が例外 Laguerre 多項式で書かれているものは，拡張動径振動子 (extended radial oscillator) とよばれる．また，多添字系は，形状不変性をもっていることを，ここに強調しておく．

■ ハミルトニアンの離散対称性

動径振動子 (L) 及び Pöschl–Teller ポテンシャル (J) のハミルトニアンから定数部分を除いたものを，それぞれ $\mathcal{H}_g(x)$, $\mathcal{H}_{g,h}(x)$ と書けば，これらは，パラメータの捻り：

$$\mathrm{L}:\ g \to 1-g\ , \quad \mathrm{J}:\ g \to 1-g\ ,\ \ h \to 1-h\ , \tag{4.36}$$

に対して不変である．このことは，以下のように直接計算で確かめられる：

$$\mathrm{L}: \qquad \mathcal{H}_{1-g}(x) = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2x^2 + \frac{\hbar^2(1-g)(-g)}{x^2} \equiv \mathcal{H}_g(x)\ , \tag{4.37}$$

$$\mathrm{J}: \qquad \mathcal{H}_{1-g,h}(x) = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2(1-g)(-g)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2h(h-1)}{\cos^2 x} \equiv \mathcal{H}_{g,h}(x)\ , \tag{4.38}$$

$$\mathcal{H}_{g,1-h}(x) = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2(1-h)(-h)}{\cos^2 x} \equiv \mathcal{H}_{g,h}(x)\ . \tag{4.39}$$

また，動径振動子 (L) のハミルトニアンから定数部分を除いたもの $\mathcal{H}_g$ は，座標の離散変換：

$$x \to \mathrm{i}x\ , \tag{4.40}$$

に対して符号を変える．即ち，

$$\mathcal{H}_g(\mathrm{i}x) = \hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \omega^2 x^2 - \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} \equiv -\mathcal{H}_g(x) \ . \tag{4.41}$$

これらの離散対称変換は固有多項式の満たす微分方程式 (A.12), (A.17), (A.21) では成り立たず，新たな固有函数系は 2 乗可積分性を失っている．しかし，依然として，新たな固有函数系は，Schrödinger 方程式は満たしているため，式 (4.36), (4.40) の変換は，Schrödinger 方程式の解を別の解に写すものである．

■ 仮想状態波動函数

ハミルトニアン (4.41), (4.37)–(4.39) に適当な定数を加えて半正定値化したものに対する固有値問題を考える．まず，式 (4.41) に対しては，

$$\mathcal{E}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}} = -4\left(g+\mathrm{v}+\frac{1}{2}\right) \ , \quad \varphi_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}(x) = \mathrm{e}^{\frac{z}{2}} z^{\frac{g}{2}} L_{\mathrm{v}}^{(g-\frac{1}{2})}(-z) \ , \quad \mathrm{v} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \ , \tag{4.42}$$

式 (4.37) に対しては，

$$\mathcal{E}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}} = -4\left(g-\mathrm{v}-\frac{1}{2}\right) \ , \quad \varphi_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1-g}{2}} L_{\mathrm{v}}^{(\frac{1}{2}-g)}(z) \ , \quad \mathrm{v} = 0, 1, \ldots, \left\lfloor g-\frac{1}{2} \right\rfloor' \tag{4.43}$$

である．ただし，記号 $\lfloor \bullet \rfloor'$ は $\bullet$ 未満の最大の整数を表している．次に，式 (4.38) に対しては，

$$\mathcal{E}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}} = -4\left(g+\mathrm{v}+\frac{1}{2}\right)\left(h-\mathrm{v}-\frac{1}{2}\right) \ , \quad \varphi_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}(x) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^{\frac{g}{2}} \left(\frac{1+y}{2}\right)^{\frac{1-h}{2}} P_{\mathrm{v}}^{(g-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-h)}(y) \ ,$$
$$\mathrm{v} = 0, 1, \ldots, \left\lfloor h-\frac{1}{2} \right\rfloor' \ , \tag{4.44}$$

式 (4.39) に対しては，

$$\mathcal{E}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}} = -4\left(g-\mathrm{v}-\frac{1}{2}\right)\left(h+\mathrm{v}+\frac{1}{2}\right) \ , \quad \varphi_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}(x) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^{\frac{1-g}{2}} \left(\frac{1+y}{2}\right)^{\frac{h}{2}} P_{\mathrm{v}}^{(\frac{1}{2}-g,h-\frac{1}{2})}(y) \ ,$$
$$\mathrm{v} = 0, 1, \ldots, \left\lfloor g-\frac{1}{2} \right\rfloor' \tag{4.45}$$

である．$\varphi_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}(x)$ などは，仮想状態波動函数とよばれ，以下の 5 つの性質をもつことが知られている：

- 定義域内に零点をもたない．
- 負のエネルギー固有値に属する．
- 仮想状態波動函数は多項式型である．
- 2 乗可積分でない．
- 逆数も，2 乗可積分でない．

以下では，この仮想状態波動函数を，多重 Darboux 変換の種解 $\varphi_{d_j}(x)$ に選ぶことを考えていく．種解として用いる仮想状態波動函数の次数 v は，非負整数の集合：

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{I}} \cup \mathcal{D}^{\mathrm{II}} = \{d_1^{\mathrm{I}}, \ldots, d_M^{\mathrm{I}}\} \cup \{d_1^{\mathrm{II}}, \ldots, d_N^{\mathrm{II}}\} \tag{4.46}$$

で指定される．ただし，

$$d_1^{\mathrm{I}} < \cdots < d_M^{\mathrm{I}} \in \mathbb{Z}_{>0} \ , \quad d_1^{\mathrm{II}} < \cdots < d_N^{\mathrm{II}} \in \mathbb{Z}_{>0}$$

である．ここで，全ての仮想状態波動函数が有効であるためには，

$$\text{L:} \qquad g > \max\left\{N + \frac{3}{2}, d_j^{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\right\} \ , \tag{4.47}$$

$$\text{J:} \qquad g > \max\left\{N + 2, d_j^{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\right\} \ , \quad h > \max\left\{M + 2, d_j^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\right\} \ . \tag{4.48}$$

とする必要がある．

「多添字 (multi-indexed) 直交多項式」という名前の由来は，以上のようにたくさんの添え字が附くことになるからである．

■ 多添字系

多添字系のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M},*)}$ は，式 (4.10) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M},*)} \coloneqq \mathcal{H}^{(*)} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln\left|\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(*),\mathrm{I}}, \ldots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(*),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(*),\mathrm{II}}, \ldots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(*),\mathrm{II}}\right](x)\right| \tag{4.49}$$

と書かれる．$* = \mathrm{L}, \mathrm{J}$ である．また，Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M},*)} \phi_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M},*)}(x) = \mathcal{E}_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M},*)} \phi_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M},*)}(x) \tag{4.50}$$

と書かれる．ただし，

$$\phi_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M},*)}(x) = \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(*),\mathrm{I}}, \ldots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(*),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(*),\mathrm{II}}, \ldots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(*),\mathrm{II}}, \phi_n^{(*)}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(*),\mathrm{I}}, \ldots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(*),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(*),\mathrm{II}}, \ldots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(*),\mathrm{II}}\right](x)} \tag{4.51}$$

は，固有値 $\mathcal{E}_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M},*)} = \mathcal{E}_n$ に属する固有函数である．

4.4.2 例

■ 動径振動子の場合 (L)

元の系として動径振動子 (3.14) を選ぶと，これから構成される多添字系のハミルトニアンは，式 (4.49) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M,L})} \coloneqq \mathcal{H}^{(\mathrm{L})} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln\left|\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \ldots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \ldots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}\right](x)\right| \tag{4.52}$$

と書かれる．$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M,L})}$ の固有値と固有函数は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M,L})} = \mathcal{E}_n^{(\mathrm{L})} = 4n\hbar\omega \ , \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M,L})}(x) &= \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \phi_n^{(\mathrm{L})}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}\right](x)} \\ &= z^{\frac{M+N}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \phi_n^{(\mathrm{L})}\right](z)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}\right](z)}\end{aligned} \tag{4.54}$$

である．ただし，2 行目への変形には式 (A.3) を用いた．特に，基底状態波動函数は，

$$\phi_{\mathcal{D},0}^{(\mathrm{M,L})}(x) = z^{\frac{M+N}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \phi_0^{(\mathrm{L})}\right](z)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{L}),\mathrm{II}}\right](z)} \tag{4.55}$$

である．

■ Pöschl–Teller ポテンシャルの場合 (J)

元の系として Pöschl–Teller ポテンシャル (3.22) を選ぶと，これから構成される多添字系のハミルトニアンは，式 (4.49) より，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M,J})} \coloneqq \mathcal{H}^{(\mathrm{J})} - 2\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \left| \mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}\right](x) \right| \tag{4.56}$$

と書かれる．$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M,J})}$ の固有値と固有函数は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M,J})} = \mathcal{E}_n^{(\mathrm{J})} = 4\hbar^2 n(n+g+h) \ , \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{D},n}^{(\mathrm{M,J})}(x) &= \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \phi_n^{(\mathrm{J})}\right](x)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}\right](x)} \\ &= [-2(1-y^2)]^{\frac{M+N}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \phi_n^{(\mathrm{J})}\right](z)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}\right](z)}\end{aligned} \tag{4.58}$$

である．ただし，2 行目への変形には式 (A.3) を用いた．特に，基底状態波動函数は，

$$\phi_{\mathcal{D},0}^{(\mathrm{M,J})}(x) = [-2(1-y^2)]^{\frac{M+N}{2}} \frac{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \phi_0^{(\mathrm{J})}\right](y)}{\mathrm{W}\left[\varphi_{d_1^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{d_M^{\mathrm{I}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{I}}, \varphi_{d_1^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}, \dots, \varphi_{d_N^{\mathrm{II}}}^{(\mathrm{J}),\mathrm{II}}\right](y)} \tag{4.59}$$

である．

4.4.3　擬仮想状態から構成される系

類似の方法で構成される系として，多重Darboux変換の種解$\varphi(x)$に擬仮想状態 (pseudo virtual state) を選ぶものがある．擬仮想状態とは，以下の条件を満たすもののことをいい，例えば，$\mathcal{H}_g$に対して，パラメータの捻り$g \to g+1$と座標の離散変換$x \to \mathrm{i}x$とを同時に行うことで得られる．

- 負のエネルギー固有値に属する．
- 仮想状態波動函数は多項式型である．
- 2乗可積分でない．
- 逆数が境界x_1, x_2で局所2乗可積分：

$$\int_{x_1}^{x_1+\epsilon} \varphi(x)^{-2}\,\mathrm{d}x < \infty\ , \quad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} \varphi(x)^{-2}\,\mathrm{d}x < \infty$$

である．

古典的な形状不変系に対して，この変形で構成される系は，パラメータを適当にずらすことでKrein–Adler系と等価になることが知られている [63].

4.5　条件付き可解系

Darboux変換（4.2節）を用いずとも，$\{\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$の縮退構造—量子力学における超対称性—を用いることで，新しい可解系を構成することができる．例えば，初めに$\mathcal{H}_+$を定義し，そこから“逆に”$\mathcal{H}_-$を構成する，という手順を踏むことができる．本節では，このように構成されるものを取り上げる．

可解な量子力学系のうち，系に含まれるパラメータを完全に自由な値に選ぶことができず，パラメータ間に制約が付くものがある．このような種類の可解系を，条件付き可解系 (conditionally exactly solvable systems) という [64]．尚，この制約は，ポテンシャルの非特異性などに由来するものである．この条件付き可解系の一部は，超対称量子力学の枠組みを用いて構成されることが知られている [43]．本節で取り上げる可解系は，この種の可解系である．

4.5.1　一般論

条件付き可解系のスーパーポテンシャル$W(x)$を次の形で導入する：

$$W(x) \coloneqq W_0(x) + W_1(x)\ . \tag{4.60}$$

ただし，$W_0(x)$として，3.2節で述べた形状不変系のスーパーポテンシャルを選び，$W_1(x)$は後に示す微分方程式を満たす函数である．これは，スーパーポテンシャルを，ある可解系とある

条件を満たす函数との重ね合わせの形で書くことで，可解系の拡張を考えることになっている．このとき，系のハミルトニアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_- &= \left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W_0(x) + W_1(x)\right)\left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W_0(x) + W_1(x)\right) \\ &= -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W_0(x)^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}x} + 2W_0(x)W_1(x) + W_1(x)^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{4.61}$$

であり，他方，パートナーのハミルトニアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_+ &= \left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W_0(x) + W_1(x)\right)\left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W_0(x) + W_1(x)\right) \\ &= -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W_0(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}x} + 2W_0(x)W_1(x) + W_1(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{4.62}$$

と表される．ここで，式 (4.61), (4.62) の前半部分：

$$-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W_0(x)^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}x}\ , \quad -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W_0(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}x}\ ,$$

は，それぞれ，形状不変系のパートナーのハミルトニアンたちに他ならない．

条件付き可解系を構成するには，式 (4.62) の後半部分が，エネルギーの定数シフト b に対応するように，

$$2W_0(x)W_1(x) + W_1(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x} = b \tag{4.63}$$

とすることを考える．ただし，基底状態の固有値は変えないので，シフト後の固有値が，基底状態の固有値よりも大きくなるために，パラメータ b に対して，

$$b > \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_1 \tag{4.64}$$

なる条件が課される．これを 条件① とする．

実際に式 (4.63) の微分方程式を解くために，条件付き可解系の基底状態波動函数 $\psi_0(x)$ が，元の可解系の基底状態波動函数 $\phi_0(x)$ と函数 $u(x)$ を用いて，

$$\psi_0(x) \equiv \frac{\phi_0(x)}{u(x)} \tag{4.65}$$

と書かれるとする．このとき，条件付き可解系のスーパーポテンシャル $W(x)$ は，

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) = -\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi_0(x) + \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x) \tag{4.66}$$

になる．よって，函数 $W_1(x)$ は，$u(x)$ を用いて，

$$W_1(x) = \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x) = \hbar\frac{u'(x)}{u(x)} \tag{4.67}$$

と書き表される．ただし，ここでは，$'$ は x についての 1 階導函数を表している．

$u(x)$ を決定する微分方程式は，式 (4.63) より，

$$\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + 2\hbar W_0(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - bu(x) = 0 \tag{4.68}$$

である．定義域内に零点をもつような $u(x)$ に対しては，適切な量子力学系を構成し得ない．従って，この微分方程式の解のうち，我々の欲しい解には，定義域内に零点をもたないことが，条件として課される．これを 条件② とする．

4.5.2 例

■ **1 次元調和振動子の場合 (H)**

$W_0(x)$ として，1 次元調和振動子を選んだ場合，即ち $W_0(x) = \omega x$ の場合を考える．このとき，超対称パートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}_+(4.62)$ は，

$$\mathcal{H}_+ = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 + \hbar\omega + b\hbar\omega \tag{4.69}$$

であり，この系のエネルギー固有値 $\mathcal{E}_n^{(+)}$ と固有函数 $\psi_n^{(+)}$ とは，

$$\mathcal{E}_n^{(+)} = [2(n+1) + b]\hbar\omega \ , \tag{4.70}$$

$$\psi_n^{(+)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x\right) \tag{4.71}$$

である．ただし，パラメータ b は，

$$b > -2 \qquad : \boxed{\text{条件①}} \tag{4.72}$$

とする．

式 (4.68) は，

$$\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + 2\hbar\omega x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - b\hbar\omega u(x) = 0 \tag{4.73}$$

であり，この一般解は，任意定数 α, β を用いて，

$$u(x) = \alpha {}_1F_1\left(-\frac{b}{4}, \frac{1}{2}; -\frac{\omega}{\hbar}x^2\right) + \beta\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{\omega}{\hbar}x^2\right) \tag{4.74}$$

と書かれる．この解が非特異であるための条件は，

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{2\Gamma\left(\frac{b}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{4}+\frac{1}{2}\right)} \qquad : \boxed{\text{条件②}} \tag{4.75}$$

である．以下では $\alpha = 1$ とする（一般性は失われない）．

以上より，求める条件付き可解系のハミルトニアン $\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{H}^{(\mathrm{C,H})}$ は，式 (4.74) の $u(x)$ を用いて，

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{C,H})} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 - \hbar\omega - b\hbar\omega + 2\hbar \frac{u'(x)}{u(x)} \left[2\omega x + \hbar \frac{u'(x)}{u(x)}\right] \tag{4.76}$$

と分かる．エネルギー固有値 $\mathcal{E}_n^{(\mathrm{C,H})}$ と固有函数 $\psi_n^{(\mathrm{C,H})}(x)$ は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_0^{(\mathrm{C,H})} = 0 \ , \quad \mathcal{E}_n^{(\mathrm{C,H})} = \mathcal{E}_{n-1}^{(+)} = (2n+b)\hbar\omega \quad \text{for } n \geqslant 1 \ , \tag{4.77}$$

$$\psi_0^{(\mathrm{C,H})}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}}}{u(x)} \ , \quad \psi_n^{(\mathrm{C,H})}(x) = \left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \omega x + \hbar\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\psi_{n-1}^{(+)}(x) \quad \text{for } n \geqslant 1 \tag{4.78}$$

である．

■ 動径振動子の場合 (L)

$W_0(x)$ として，動径振動子を選んだ場合，即ち $W_0(x) = \omega x - \hbar g/x$ の場合を考える．このとき，超対称パートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}_+(4.62)$ は，

$$\mathcal{H}_+ = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2 g(g+1)}{x^2} - (2g-1)\hbar\omega + b\hbar\omega \tag{4.79}$$

であり，この系のエネルギー固有値 $\mathcal{E}_n^{(+)}$ と固有函数 $\psi_n^{(+)}$ とは，

$$\mathcal{E}_n^{(+)} = [4(n+1)+b]\hbar\omega \ , \tag{4.80}$$

$$\psi_n^{(+)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} x^{g+1} L_n^{(g+\frac{1}{2})}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x\right) \tag{4.81}$$

である．ただし，パラメータ b は，

$$b > -4 \qquad : \boxed{\text{条件①}} \tag{4.82}$$

とする．

式 (4.68) は，

$$\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + 2\hbar\left(\omega x - \frac{\hbar g}{x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - b\hbar\omega u(x) = 0 \tag{4.83}$$

であり，この一般解は，任意定数 α, β を用いて，

$$u(x) = \alpha\, {}_1F_1\left(-\frac{b}{4}, \frac{1}{2} - g; -\frac{\omega}{\hbar}x^2\right) + \beta\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x\right)^{2g+1} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + g - \frac{b}{4}, \frac{3}{2} + g; -\frac{\omega}{\hbar}x^2\right) \tag{4.84}$$

と書かれる．この解が非特異であるための条件は，

$$\alpha > 0 \ , \quad \frac{\beta}{\alpha} > -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - g\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - g + \frac{b}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{b}{4} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + g\right)} \qquad : \boxed{\text{条件②}} \tag{4.85}$$

である．以下では $\alpha = 1$ とする（一般性は失われない）．

以上より，求める条件付き可解系のハミルトニアン $\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{H}^{(\mathrm{C,L})}$ は，式 (4.84) の $u(x)$ を用いて，

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{C,L})} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{x^2} - (2g+1)\hbar\omega - b\hbar\omega + 2\hbar\frac{u'(x)}{u(x)}\left[2\omega x - \frac{2\hbar g}{x} + \hbar\frac{u'(x)}{u(x)}\right] \tag{4.86}$$

と分かる．エネルギー固有値 $\mathcal{E}_n^{(\mathrm{C,L})}$ と固有函数 $\psi_n^{(\mathrm{C,L})}(x)$ は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_0^{(\mathrm{C,L})} = 0 \ , \quad \mathcal{E}_n^{(\mathrm{C,L})} = \mathcal{E}_{n-1}^{(+)} = (4n+b)\hbar\omega \quad \text{for } n \geqslant 1 \ , \tag{4.87}$$

$$\psi_0^{(\mathrm{C,L})}(x) = \frac{x^g \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}}}{u(x)} \ , \quad \psi_n^{(\mathrm{C,L})}(x) = \left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \omega x - \frac{\hbar g}{x} + \hbar\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\psi_{n-1}^{(+)}(x) \quad \text{for } n \geqslant 1 \tag{4.88}$$

である．

■ Pöschl–Teller ポテンシャルの場合 (J)

$W_0(x)$ として，Pöschl–Teller ポテンシャルを選んだ場合，即ち $W_0(x) = -\hbar(g\cot x - h\tan x)$ の場合を考える．このとき，超対称パートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}_+$(4.62) は，

$$\mathcal{H}_+ = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g+1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2 h(h+1)}{\cos^2 x} - \hbar^2(g+h)^2 + \hbar^2 b \tag{4.89}$$

であり，この系のエネルギー固有値 $\mathcal{E}_n^{(+)}$ と固有函数 $\psi_n^{(+)}$ とは，

$$\mathcal{E}_n^{(+)} = 4\hbar^2(n+1)(n+g+h+1) + \hbar^2 b\ , \tag{4.90}$$

$$\psi_n^{(+)}(x) = (\sin x)^{g+1}(\cos x)^{h+1} P_n^{(g+\frac{1}{2},h+\frac{1}{2})}(\cos 2x) \tag{4.91}$$

である．ただし，パラメータ b は，

$$b > -4(g+h+1) \qquad : \boxed{\text{条件①}} \tag{4.92}$$

とする．

式 (4.68) は，

$$\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 2\hbar^2(g\cot x - h\tan x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \hbar^2 b u(x) = 0 \tag{4.93}$$

であり，この一般解は，任意定数 α, β を用いて，

$$\begin{aligned} u(x) = {}& \alpha\, {}_2F_1\left(-\frac{g}{2}-\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}, -\frac{g}{2}-\frac{h}{2}+\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}, \frac{1}{2}-h; \cos^2 x\right) \\ & + \beta(\cos 2x)^{2h+1}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{g}{2}+\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{g}{2}+\frac{h}{2}+\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}, \frac{3}{2}+h; \cos^2 x\right) \end{aligned} \tag{4.94}$$

と書かれる．この解が非特異であるための条件は，

$$\alpha - \beta > 0\ ,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} > -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-h\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+h\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{g}{2}+\frac{h}{2}+\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{g}{2}+\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{g}{2}-\frac{h}{2}+\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{g}{2}-\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{(g+h)^2-b}}{2}\right)}$$

$$: \boxed{\text{条件②}} \tag{4.95}$$

である．以下では $\alpha = 1$ とする（一般性は失われない）．

以上より，求める条件付き可解系のハミルトニアン $\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{H}^{(\mathrm{C,J})}$ は，式 (4.94) の $u(x)$ を用いて，

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\mathrm{C,J})} = {}& -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{\hbar^2 h(h-1)}{\cos^2 x} - \hbar^2(g+h)^2 - \hbar^2 b \\ & - 2\hbar^2\frac{u'(x)}{u(x)}\left[2g\cot x - 2h\tan x + \hbar\frac{u'(x)}{u(x)}\right] \end{aligned} \tag{4.96}$$

と分かる．エネルギー固有値 $\mathcal{E}_n$ と固有函数 $\psi_n(x)$ は，それぞれ，

$$\mathcal{E}_0^{(\mathrm{C,J})} = 0 \ , \quad \mathcal{E}_n^{(\mathrm{C,J})} = \mathcal{E}_{n-1}^{(+)} = 4\hbar^2 n(n+g+h) + \hbar^2 b \qquad \text{for } n \geqslant 1 \ , \tag{4.97}$$

$$\psi_0^{(\mathrm{C,J})}(x) = \frac{(\sin x)^g (\cos x)^h}{u(x)} \ ,$$

$$\psi_n^{(\mathrm{C,J})}(x) = \left[-\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \hbar(g \cot x - h \tan x) + \hbar \frac{u'(x)}{u(x)} \right] \psi_{n-1}^{(+)}(x) \qquad \text{for } n \geqslant 1 \tag{4.98}$$

である．

4.6 質量が位置に依存する場合の形状不変系

本節では，Darboux 変換（4.2 節）を用いずに新たな可解系を構築する別の例を示す．そこでは，質量 m が位置 x に依存する状況を考えることになる．つまり，ハミルトニアンの運動項について，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \to -\frac{\hbar^2}{2m(x)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \tag{4.99}$$

を考える．ここで，$m(x)$ は，位置依存性をもつ質量 (position-dependent mass) とよばれる [65]．

本論文で興味があるのは，このような質量が位置に依存する場合のうち，特に形状不変性を満たすものである．以下では，質量が位置に依存する系のハミルトニアンを定義した後に，形状不変性の条件式を質量の位置依存性を考慮した場合に拡張する [66]．具体的な例は，その後で紹介する．

4.6.1 一般論

以下では，記号の簡略化のために，

$$\frac{1}{2m(x)} \equiv \eta(x)^2$$

と記す．

■ ハミルトニアンの定義

質量が位置に依存する場合のハミルトニアンを

$$\mathcal{H}_{\mathrm{d}} \coloneqq \mathcal{A}_{\mathrm{d}}^{\dagger}\mathcal{A}_{\mathrm{d}} \ , \tag{4.100}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{d}}^{\dagger} \coloneqq -\hbar\sqrt{\eta(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\eta(x)} + W_{\mathrm{d}}(x) \ , \quad \mathcal{A}_{\mathrm{d}} \coloneqq \left(\mathcal{A}_{\mathrm{d}}^{\dagger}\right)^{\dagger} \tag{4.101}$$

で定義する [66]．このとき，ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{d}}$ は，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{d}} &= -\hbar^2\eta(x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\hbar^2\eta'(x)\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\hbar^2}{4}\left[\eta''(x)\eta(x) + \eta'(x)^2\right] + W_{\mathrm{d}}(x)^2 - \hbar\eta(x)\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{d}}(x)}{\mathrm{d}x} \\ &\equiv -\hbar^2\eta(x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\hbar^2\eta'(x)\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\hbar^2}{4}\left[\eta''(x)\eta(x) + \eta'(x)^2\right] + V_{\mathrm{d}}(x)\end{aligned} \tag{4.102}$$

と計算される．

このように構成された系 $\mathcal{H}_{\mathrm{d}}$ には，質量が位置に依存する系である，という以外に次のような解釈ができる．即ち，計量 $g(x) \equiv 1/\eta(x)^2$ で表される Riemann 空間上の系である，というものである．ただし，1 次元空間なら計量はただのスカラーで，その意味は，“距離” ds が

$$(ds)^2 = g(x)(dx)^2 = \frac{1}{\eta(x)^2}(dx)^2 \tag{4.103}$$

と書かれるということである．いずれにせよ，$\eta(x)$ は，系の “変形” を表している．尚，$\eta(x) = \text{const.}$ ととれば，これまでの場合（質量が位置に依存しない場合）に帰着される．

■ 質量が位置に依存する場合の形状不変性

ここで，ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{d}} \equiv \mathcal{H}_{\mathrm{d}}^{(-)}$ のパートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{d}}^{(+)}$ は，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{d}}^{(+)} &\coloneqq \mathcal{A}_{\mathrm{d}}\mathcal{A}_{\mathrm{d}}^{\dagger} \\ &= -\hbar^2\eta(x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\hbar^2\eta'(x)\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\hbar^2}{4}\left[\eta''(x)\eta(x) + \eta'(x)^2\right] + W_{\mathrm{d}}(x)^2 + \hbar\eta(x)\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{d}}(x)}{\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{4.104}$$

である．

パートナーのハミルトニアンたちには，パラメータ a が含まれているとし，その依存性を $\mathcal{H}_{\mathrm{d}}^{(-)}(a)$ などのように明示的に表すと，形状不変性の条件式 (2.48) は，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{d}}^{(+)}(a) = \mathcal{H}_{\mathrm{d}}^{(-)}(f(a)) + R(a)$$

と読み替えられる．ただし，$\eta(x)$ は，パラメータ a に依存しないとする．従って，質量が位置に依存する場合の形状不変性 (deformed shape invariance) の条件式は，

$$W(x)(x;a)^2 + \hbar\eta(x)\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{d}}(x;a)}{\mathrm{d}x} = W_{\mathrm{d}}(x;f(a))^2 - \hbar\eta(x)\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{d}}(x;f(a))}{\mathrm{d}x} + R(a) \tag{4.105}$$

と書かれる．また，系のエネルギー固有値は，

$$\mathcal{E}_{\mathrm{d},n} = \sum_{i=0}^{n-1} R(f^i(a)) \tag{4.106}$$

から求められる．

4.6.2 例

本小節では，質量が位置に依存する場合の形状不変系の例を 3 つ示す[註15]．

[註15] これらの構成法は，謂わば発見法的なものであり，系統的構成法 [66] に則ったものではない．

■ **1 次元調和振動子の対応物 (H)**

スーパーポテンシャル $W_{\rm d}(x)$ と系の“変形”$\eta(x)$ を

$$W_{\rm d}(x) = \hbar\alpha\omega x \ , \quad \eta(x) = 1 + \alpha x^2 \ , \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{4.107}$$

とする．このとき，ポテンシャル $V_{\rm d}(x)$ は，

$$V_{\rm d}(x) = \hbar^2 \left[\alpha^2\omega(\omega-1)x^2 - \alpha\omega\right] \tag{4.108}$$

と書かれ，形状不変変換におけるパラメータの変更は，$\omega \to \omega + 1$ である．従って，簡単な計算から，エネルギー固有値 $\mathcal{E}_{{\rm d},n}$ は，

$$\mathcal{E}_{{\rm d},n} = \hbar^2\alpha n(n + 2\omega) \tag{4.109}$$

と分かる．

■ **動径振動子の対応物 (L)**

スーパーポテンシャル $W_{\rm d}(x)$ と系の“変形”$\eta(x)$ を

$$W_{\rm d}(x) = \hbar\left(-\frac{g}{x} + \alpha\omega x\right) \ , \quad \eta(x) = 1 + \alpha x^2 \ , \quad x \in [0, \infty) \tag{4.110}$$

とする．このとき，ポテンシャル $V_{\rm d}(x)$ は，

$$V_{\rm d}(x) = \hbar^2 \left[\frac{g(g-1)}{x^2} + \alpha^2\omega(\omega-1)x^2 - \alpha(g+\omega) - 2\alpha g\omega\right] \tag{4.111}$$

と書かれ，形状不変変換におけるパラメータの変更は，$\omega \to \omega + 1$, $g \to g + 1$ である．従って，簡単な計算から，エネルギー固有値 $\mathcal{E}_{{\rm d},n}$ は，

$$\mathcal{E}_{{\rm d},n} = 4\hbar^2\alpha n(n + g + \omega) \tag{4.112}$$

と分かる．

■ **Pöschl–Teller ポテンシャルの対応物 (J)**

スーパーポテンシャル $W_{\rm d}(x)$ と系の“変形”$\eta(x)$ を

$$W_{\rm d}(x) = -\hbar\left[(1+\alpha)g\cot x - (1+\beta)h\tan x\right] \ , \quad \eta(x) = 1 + \alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x \ , \quad x \in (0, \pi) \tag{4.113}$$

とする．このとき，ポテンシャル $V_{\rm d}(x)$ は，

$$V_{\rm d}(x) = \hbar^2 \left[\frac{(1+\alpha)^2 g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{(1+\beta)^2 h(h-1)}{\cos^2 x} - (1+\alpha)^2 g^2 - (1+\beta)^2 h^2 - 2(1+\alpha)(1+\beta)gh + (1+\alpha)(\alpha-\beta)g + (1+\beta)(\beta-\alpha)h\right] \tag{4.114}$$

と書かれ，形状不変変換におけるパラメータの変更は，$g \to g + 1$, $h \to h + 1$ である．従って，簡単な計算から，エネルギー固有値 $\mathcal{E}_{{\rm d},n}$ は，

$$\mathcal{E}_{{\rm d},n} = 4\hbar^2(1+\alpha)(1+\beta)n(n + g + h) \tag{4.115}$$

と分かる．

第5章

可解系とSWKB条件

本章と次章とが，本論文における独自な研究の部分である．本章は，概要における A. の研究に当たる．

本章の構成は，以下の通り．まず，5.1 節において，2.5.3 節で導入された SWKB 条件について，その諸性質などを具体的に議論する．続く 5.2 節では，この条件が古典的な形状不変系に対しては，常に成立することを示す．以上を踏まえて，我々は，SWKB 条件を種々の可解系を捉え直す指標として採用することにした．5.3 節では，前章までに導入してきた可解系に対して，SWKB 積分の計算を行う．この解析から，我々は，SWKB 条件と系の準位構造との関連に気付き，5.4 節において，条件付き可解系を例に議論を行う．この議論によって，我々は，条件付き可解系に対する新たな理解を得た．本章の最後（5.5 節）では，A. の研究の結論を述べる．

尚，5.3 節の議論の一部は，文献 [67] に報告してある．

5.1 SWKB条件

5.1.1 SWKB条件

■ 定式化

超対称量子力学の文脈では，量子化条件の一種として，A. Comtet らの提案した SWKB (supersymetric WKB) 量子化条件（SWKB 条件）[22] が知られている[註16]．この条件は，

$$\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}\,\mathrm{d}x = n\pi\hbar\ , \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\ , \tag{2.49}$$

と書き表される．$a_{\mathrm{L}}, a_{\mathrm{R}}$ は，x についての方程式 $W(x)^2 = \mathcal{E}_n$ の解で，$a_{\mathrm{L}} < a_{\mathrm{R}}$ とする．式 (2.49) の左辺の積分を I とおき，以降ではこれを簡単に SWKB 積分とよぶことにする：

$$I \equiv \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{5.1}$$

■ 諸性質

基底状態 $(n = 0)$ に対しては，SWKB 条件 (2.49) は恒等的に成り立つ．基底状態のエネルギー固有値は $\mathcal{E}_0 = 0$ であり，$W(x) = 0$ となる点が少なくともひとつは存在する[註17]ことから，

[註16] 文献 [22] の著者ら (A. Comtet, A. Bandrauk, D. K. Campbell) の頭文字をとって，CBC 条件ともよばれる．

[註17] 式 (2.12) で示したように，スーパーポテンシャル $W(x)$ は基底状態波動函数 $\psi_0(x)$ を用いて，

$$W(x) = -\hbar\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}$$

と表される．この関係式から，$W(x) = 0$ の点は即ち，$\psi_0'(x) = 0$ となる点で．$\psi_0(x)$ が極大となる点である．

その点を $x = a$ とすれば，SWKB 条件 (2.49) は，

$$\int_a^a \sqrt{0 - W(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^a |W(x)|\,\mathrm{d}x \equiv 0 \tag{5.2}$$

となる．このことは，どの系に対しても成り立つ．他方，$n \geqslant 1$ の状態に対しては，一般には SWKB 条件 (2.49) は成り立たない．しかし，古典的な形状不変系については，全ての準位に対して式 (2.49) が成立することが知られている [23].

SWKB 条件 (2.49) は，WKB 量子化条件（式 (5.3) 参照）同様，エネルギーの量子化条件だとみることができる．SWKB 条件が厳密に成り立つ古典的な形状不変系以外の系に対しては，式 (2.49) はエネルギー準位 $\mathcal{E}_n$ を与える近似公式として用いられることがあり，WKB 量子化条件よりよい近似であることが分かっている [25].

5.1.2 SWKB 条件の導出

SWKB 条件 (2.49) は，歴史的には，WKB 量子化条件から，$\hbar^0$ と $\hbar^1$ のオーダーの項を取り出すことによって導出された [22]．本小節では，その導出を示した後に，この形式的な導出に含まれている問題点を指摘する．

■ WKB 量子化条件

WKB 量子化条件[註18] は，

$$\int_{x_\mathrm{L}}^{x_\mathrm{R}} \sqrt{\mathcal{E}_n - V(x)}\,\mathrm{d}x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar\,, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\,, \tag{5.3}$$

で与えられる．ただし，$x_\mathrm{L} < x_\mathrm{R}$ は古典的転回点で，x についての方程式 $V(x) = \mathcal{E}_n$ を解くことで求められる．

■ 形式的な導出

SWKB 条件は，形式的には，以下のように WKB 量子化条件 (5.3) から導出される．式 (5.3) の左辺を，スーパーポテンシャル $W(x)$ を用いて書き直した上で，$\hbar$ の冪級数に展開すると，

$$\begin{aligned}
\int_{x_\mathrm{L}}^{x_\mathrm{R}} \sqrt{\mathcal{E}_n - V(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{x_\mathrm{L}}^{x_\mathrm{R}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}}\,\mathrm{d}x \\
&\cong \int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\hbar}{2}\left[\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}}\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{\mathcal{E}_n - W(a_\mathrm{R})^2}\,\frac{\mathrm{d}a_\mathrm{R}}{\mathrm{d}\hbar}\bigg|_{\hbar\to 0} - \sqrt{\mathcal{E}_n - W(a_\mathrm{L})^2}\,\frac{\mathrm{d}a_\mathrm{L}}{\mathrm{d}\hbar}\bigg|_{\hbar\to 0}\right] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
&= \int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\hbar}{2}\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}}\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \mathcal{O}(\hbar^2)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

[註18] “WKB” は，3 人の物理学者：G. Wentzel, H. A. Kramers, L. N. Brillouin，の名前の頭文字をとったものである．地球物理学者の H. Jeffreys も加えて，“WKBJ” とよばれることもある．

とできる．ただし，この際，$W(x)$ は $\hbar$ に依存しないと仮定した．式 (5.4) の展開の第 2 項は，

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{2}\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_n-W(x)^2}}\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &= \frac{\hbar}{2}\sin^{-1}\left[\frac{W(x)}{\sqrt{\mathcal{E}_n}}\right]\Bigg|_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}}\\ &= \frac{\hbar}{2}\left(\sin^{-1}\left[\frac{W(a_{\mathrm{R}})}{\sqrt{\mathcal{E}_n}}\right]-\sin^{-1}\left[\frac{W(a_{\mathrm{L}})}{\sqrt{\mathcal{E}_n}}\right]\right)\\ &= \frac{1}{2}\pi\hbar \end{aligned} \tag{5.5}$$

と計算される．$\mathcal{O}(\hbar^2)$ を無視すれば，WKB 量子化条件 (5.3) は，

$$\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}}\sqrt{\mathcal{E}_n-W(x)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\pi\hbar=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\hbar \tag{5.6}$$

となり，SWKB 条件 (2.49) が導出される．

■ 問題点

前段で述べた SWKB 条件の導出は，あくまで，形式的なものに過ぎない．というのも，前述の，$W(x)$ が $\hbar$ に依存しないという前提は，一般には成り立たないからだ．例えば，動径振動子の場合を考えれば，式 (3.13) : $W(x)=\omega x+\hbar g/x$，から，これは明らかである．$W(x)$ が $\hbar$ に依存しないという仮定が成り立たなければ，式 (5.4) の展開はできない．$W(x)$ が $\hbar$ に依存するならば，展開式 (5.4) は，より複雑な形になる筈である．

以上のことから，我々は，SWKB 条件 (2.49) が，WKB 量子化条件 (5.3) から導出されるものではなく，両者は互いに独立な条件式である，と考える．また，次節以降では，SWKB 条件 (2.49) が $\hbar$ に依らない条件式になっていることを，個別に示してゆく．この，SWKB 条件 (2.49) が $\hbar$ に依存しないという事実は，SWKB 条件 (2.49) と WKB 量子化条件 (5.3) とが互いに独立な条件式であるという我々の主張を支持するものとなっている．

スーパポテンシャル $W(x)$ が $\hbar$ に依存しないという仮定の下で行われている議論は，他にもある．例えば，文献 [27, 60, 68, 69, 70] などの J. Bougie らの一連の仕事が挙げられる．これらの論文における誤りは，5.3.3 節において詳しく指摘する．この種の誤謬がしばしば見受けられることには，例えば，次の事情がある考えられる．超対称量子力学には，前述の通り，1 次元調和振動子の因子化解法を一般化したものであるという側面がある．1 次元調和振動子のスーパーポテンシャルは，式 (3.5) より $W(x)=\omega x$ と書かれ，これは $\hbar$ に依存しない．$\hbar$ 依存性の有無という差異に無頓着なまま，1 次元調和振動子で成り立っていた議論を流用してしまうと，上述のような誤りを犯してしまうことになる．

5.2 古典的な形状不変系に対する SWKB 条件

前節で述べたように，古典的な形状不変系については，SWKB 条件 (2.49) が全ての準位に対して成立する．このことは，直接，式 (2.49) の左辺を計算し，これが $n\pi\hbar$ に等しいことを導くことで確認できる．本小節では，1 次元調和振動子 (H)，動径振動子 (L)，Pöschl–Teller ポテンシャル (J) の 3 例について示す．尚，3.2 節に挙げた他の例については，附録 B で証明を与える．

■ **1 次元調和振動子の場合 (H)**

1 次元調和振動子の場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形において，$a \equiv \sqrt{\dfrac{2n\hbar}{\omega}}$ である．

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^{a} \sqrt{2n\hbar\omega - \omega^2 x^2}\ \mathrm{d}x \\ &\equiv 2\omega \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= 2\omega \cdot \frac{\pi a^2}{4} \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

このように，SWKB 条件は，$\hbar$, ω に依らずに成立することが分かる．

■ **動径振動子の場合 (L)**

動径振動子の場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$x^2 \equiv y\ , \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}} \to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ ,$$

を行なっている．また，p, q は，

$$p + q = \frac{4\hbar n + 2\hbar g}{\omega}\ , \quad pq = \frac{\hbar^2 g^2}{\omega^2} \tag{5.7}$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変形には式 (A.25) を用いた．

$$\begin{aligned} I &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{4n\hbar\omega - \omega^2 x^2 + 2\hbar\omega g - \frac{\hbar^2 g^2}{x^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{p}^{q} \sqrt{4n\hbar\omega - \omega^2 y + 2\hbar\omega g - \frac{\hbar^2 g^2}{y}} \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} \\ &\equiv \frac{\omega}{2} \int_{p}^{q} \sqrt{(y-p)(q-y)}\ \frac{\mathrm{d}y}{y} \\ &= \frac{\omega}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \frac{4\hbar n + 2\hbar g}{\omega} - \pi \frac{\hbar g}{\omega} \right) \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

このように，SWKB 条件は，$\hbar$, ω, g に依らずに成立することが分かる．

■ **Pöschl–Teller ポテンシャルの場合 (J)**

Pöschl–Teller ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$\cos 2x \equiv y\ , \quad dx = -\frac{dy}{2\sqrt{1-y^2}}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}} \to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ , \quad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2}{1-y}\ , \quad \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{1+y}\ ,$$

を行なっている．また，p, q は，

$$p+q = -\frac{2(g^2-h^2)}{(2n+g+h)^2}\ , \quad pq = \frac{2(g^2+h^2)}{(2n+g+h)^2} - 1 \tag{5.8}$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変形には式 (A.27) を用いた．

$$\begin{aligned} I &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{4\hbar^2 n(n+g+h) - \frac{\hbar^2 g^2}{\sin^2 x} - \frac{\hbar^2 h^2}{\cos^2 x} + \hbar^2 (g+h)^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \hbar \int_p^q \sqrt{(2n+g+h)^2 - \frac{2g^2}{1-y} - \frac{2h^2}{1+y}} \left(-\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{1-y^2}} \right) \\ &\equiv \frac{\hbar(2n+g+h)}{2} \int_q^p \sqrt{(y-p)(q-y)} \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\ &= \frac{\hbar(2n+g+h)}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \left[2 - \frac{2g}{2n+g+h} - \frac{2h}{2n+g+h} \right] \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

このように，SWKB 条件は，$\hbar$, g, h に依らずに成立することが分かる．

5.3 種々の可解系に対する SWKB 条件

5.3.1 概観

■ **小史**

これまで種々の可解系に対する SWKB 条件が調べられてきた．その歴史を形状不変性との関係に注目してまとめると，次のようになる．

前述の通り，全ての古典的な形状不変系について，SWKB 条件 (2.49) が厳密に成立する．このことから，かつては，系が形状不変性をもつことは SWKB 条件が厳密に成立するための十分条件である，と考えられていた [23]．

歴史的には，この逆，即ち系の形状不変性が SWKB 条件が厳密に成り立つための必要条件となっているか，という問題が盛んに議論されてきた．その手法は，古典的な形状不変系以外の可解系に対して，数値的に SWKB 積分を実行する，というものであった．A. Khare ら [24] や D. DeLaney ら [25] は，Ginocchio ポテンシャル [40] や Abraham–Moses 系 [42] に対して，SWKB 条件が成立しないことを数値的に示した．文献 [24] では，この解析から，系が形状不変性をもつことは SWKB 条件が厳密に成立するための必要条件でもある，即ち系が形状不変性をもつことは SWKB 条件が厳密に成立するための必要十分条件である，との仮説を立てた．しかしな

がら，この仮説は現在に至るまで証明されておらず，様々な具体的な場合についての計算が為されているのみである．

2018 年になって，J. Bougie らは，拡張動径振動子とよばれる新しい形状不変系では SWKB 条件が成り立ってないことを主張した [27]．次小節で述べるように，彼らの解析には誤りが含まれている．しかし，彼らの主張は，古くから議論の前提とされていたことの反例となる可能性があり，その真偽は検証する価値があることと思われる．更に，この問題は，系の形状不変性によって SWKB 条件が保証され得るかという問題であり，SWKB 条件の理解に深く関わる問題である．

■ 我々の解析の指針

前項に則って考えれば，結局，SWKB 条件の研究には，以下のふたつの大きな流れがある：

- 系が形状不変性をもつことは SWKB 条件が厳密に成立するための必要条件である，といえるか．その検証のため，形状不変系以外に対する SWKB 積分の計算をしたり，SWKB 条件が成立しない場合にどのような補正を加えればよいかの議論に発展したりする．

- そもそも，系が形状不変性をもつことは SWKB 条件が厳密に成立するための十分条件である，といえるか．その検証のため，新しい形状不変系に対する SWKB 積分の計算をする必要がある．

そこで，我々は，以下の指針に沿って SWKB 条件の解析を進めてゆくことにする．まず第 1 に，古典的な形状不変系の変形に対して，SWKB 条件が厳密に成立するような可解系の探索を行う．

第 2 に，文献 [27] の誤りを正し，その主張を検証することで，系の形状不変性が SWKB 条件が厳密に成立するための十分条件であるか否かの議論に決着をつけることを試みる．また，拡張動径振動子を一般化した形状不変系である多添字系に対する解析も，併せて行う．

第 3 に，多添字系と同様に古典的な形状不変系から多重 Darboux 変換によって得られる，形状不変性をもたない Krein–Adler 系に対して，SWKB 条件の解析を行う．Krein–Adler 系について調べることは，多添字系の場合との対比において，形状不変性が SWKB 条件に対してもつ意味を知る助けとなることが期待される．古典的な形状不変系から多重 Darboux 変換によって得られる 2 系のうち，形状不変性を保っている多添字系と形状不変性を失っている Krein–Adler 系とでは，SWKB 条件に対して違う性質を示すのであろうか．また，これに留まらず，Krein–Adler 系は元の可解系から準位を削除することによって得られる系であることから，そのような変形が SWKB 積分の値にどのような寄与をもたらすか，ということも SWKB 条件に対する理解を深めることになる．

また，そもそも歴史的な流れとは別に，種々の可解系に対して SWKB 条件成立の可否を調べることは，可解性に対する新たな視点を提供してくれる，という点においても意味のあることだと考えられる．SWKB 積分の値が $n\pi\hbar$ からいくらずれているか（以降，SWKB 条件の破れとよぶ）を調べることは，その可解系の何らかの「情報」を古典的な形状不変系との対比において見いだすことになる．この「情報」をもとに可解性を考えることは，可解性の新たな側面を浮き彫りにすることが期待される．

5.3.2　質量が位置に依存する場合の形状不変系に対する SWKB 条件

■　一般論

式 (2.49) において，質量 m の依存性を復活させると，SWKB 積分 I の被積分函数は，

$$\sqrt{2m(\mathcal{E}_n - W(x)^2)}$$

となる．この式に対して，$1/2m \to \eta(x)^2$ の置き換えをすることによって，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件は，

$$\int_{a_{\rm L}}^{a_{\rm R}} \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}}{\eta(x)}\,{\rm d}x = n\pi\hbar \tag{5.9}$$

と書かれることが分かる．以降，質量が位置に依存する場合の SWKB 積分は，$I_{\rm d}$ と書く：

$$I_{\rm d} \equiv \int_{a_{\rm L}}^{a_{\rm R}} \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n - W(x)^2}}{\eta(x)}\,{\rm d}x\ . \tag{5.10}$$

■　1 次元調和振動子の対応物の場合 (H)

1 次元調和振動子に対応する系に対して，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件 (5.9) が成り立つことを示す．ただし，以下の式の変形において，$a^2 \equiv \dfrac{n^2}{\alpha\omega^2} + \dfrac{2n}{\alpha\omega}$ である．また，2 行目から 3 行目への変形では，変数変換：

$$x \equiv a\sin\theta\ ,\quad dx = a\cos\theta\ d\theta\ ,\quad \begin{array}{c|c} x & -a \to a \\ \hline \theta & -\pi/2 \to \pi/2 \end{array}\ ,$$

を行っており，3 行目から 4 行目への変形には，式 (A.29) を用いた．

$$\begin{aligned} I_{\rm d} &= \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\hbar^2\alpha n(n+2\omega) - \hbar^2\alpha^2\omega^2x^2}}{1+\alpha x^2}\,{\rm d}x \\ &\equiv \hbar\alpha\omega\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1+\alpha x^2}\,{\rm d}x \\ &= \hbar\alpha\omega a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{1+\alpha a^2\sin^2\theta}\,{\rm d}\theta \\ &= \hbar\alpha\omega a^2\cdot\frac{\pi}{\alpha a^2}\left(\sqrt{1+\alpha a^2}-1\right) \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

このように，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件は，$\hbar$, ω, α に依らずに成立することが分かる．

■　動径振動子の対応物の場合 (L)

動径振動子に対応する系に対して，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件 (5.9) が成り立つことを示す．ただし，式の変形において，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$x^2 \equiv y\ ,\quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}\ ,\quad \begin{array}{c|c} x & a_{\rm L} \to a_{\rm R} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ ,$$

を行っている．また，p, q は，

$$p+q=\frac{2\left[2n(n+g+\omega)+g\omega\right]}{\alpha\omega^2}\ ,\quad pq=\frac{g^2}{\alpha^2\omega^2}$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変形には，式 (A.30)–(A.35) を用いた．

$$\begin{aligned}
I_{\rm d}&=\int_{a_{\rm L}}^{a_{\rm R}}\frac{\sqrt{4\hbar^2\alpha n(n+g+\omega)-\hbar^2\alpha^2\omega^2x^2+\hbar^2g\alpha\omega-\dfrac{\hbar^2g^2}{x^2}}}{1+\alpha x^2}\,{\rm d}x\\
&=\hbar\int_p^q\frac{\sqrt{4\hbar^2\alpha n(n+g+\omega)-\hbar^2\alpha^2\omega^2y+\hbar^2g\alpha\omega-\dfrac{\hbar^2g^2}{y}}}{1+\alpha x^2}\,\frac{{\rm d}y}{2\sqrt{y}}\\
&=\frac{\hbar\omega}{2}\int_p^q\frac{\sqrt{(y-p)(q-y)}}{y(y+\frac{1}{\alpha})}\,{\rm d}y\\
&=\frac{\hbar\omega}{2}\cdot\left[-\frac{g}{\omega}-1+\frac{2n+g+\omega}{\omega}\right]\pi\\
&=n\pi\hbar
\end{aligned}$$

∎

このように，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件は，$\hbar$, ω, g, α に依らずに成立することが分かる．

■ Pöschl–Teller ポテンシャルの対応物の場合 (J)

Pöschl–Teller ポテンシャルに対応する系に対して，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件 (5.9) が成り立つことを示す．ただし，式の変形において，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$\cos 2x\equiv y\ ,\quad dx=-\frac{dy}{2\sqrt{1-y^2}}\ ,\quad \begin{array}{c|c}x & a_{\rm L}\to a_{\rm R}\\ \hline y & p\to q\end{array}\ ,\quad \frac{1}{\sin^2x}=\frac{2}{1-y}\ ,\quad \frac{1}{\cos^2x}=\frac{2}{1+y}\ ,$$

を行っている．また，p, q は，

$$\begin{aligned}
p+q&=\frac{2\left[(1+\alpha)^2g^2-(1+\beta)^2h^2\right]}{A}\ ,\\
pq&=-\frac{4(1+\alpha)(1+\beta)n(n+g+h)-\left[(1+\alpha)g-(1+\beta)h\right]^2}{A}\ ,\\
A&\equiv 4(1+\alpha)(1+\beta)n(n+g+h)+\left[(1+\alpha)g+(1+\beta)h\right]^2
\end{aligned}$$

を満たす．更に，3 行目から 4 行目への変形では，変数変換：

$$y-\frac{p+q}{2}\equiv\zeta\ ,\quad dy=d\zeta\ ,\quad \begin{array}{c|c}y & p\to q\\ \hline \zeta & -(q-p)/2\to(q-p)/2\end{array}\ ,$$

を行っている．4 行目から 5 行目への変形には，式 (A.36) を用いた．

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{d}} &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \frac{\sqrt{4\hbar^2(1+\alpha)(1+\beta)n(n+g+h) - \dfrac{\hbar^2(1+\alpha)^2g^2}{\sin^2 x} - \dfrac{\hbar^2(1+\beta)^2h^2}{\cos^2 x} - \hbar^2[(1+\alpha)g+(1+\beta)h]^2}}{1+\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \hbar\int_p^q \frac{\sqrt{4(1+\alpha)(1+\beta)n(n+g+h) - \dfrac{2(1+\alpha)^2g^2}{1-y} - \dfrac{2(1+\beta)^2h^2}{1+y} - [(1+\alpha)g+(1+\beta)h]^2}}{\dfrac{\alpha+\beta+2}{2}+\dfrac{\beta-\alpha}{2}y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{-2\sqrt{1-y^2}}\right) \\
&= \hbar\sqrt{A}\int_q^p \frac{\sqrt{(y-q)(p-y)}}{\alpha+\beta+2+(\beta-\alpha)y}\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\
&= \hbar\sqrt{A}\int_{-(q-p)/2}^{(q-p)/2} \frac{\sqrt{\left(\dfrac{q-p}{2}\right)^2-\zeta^2}}{\left[\alpha+\beta+2+\dfrac{(\beta-\alpha)(p+q)}{2}+(\beta-\alpha)\zeta\right]\left(\zeta-\dfrac{p+q}{2}+1\right)\left(\zeta-\dfrac{p+q}{2}-1\right)}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \hbar\sqrt{A}\cdot\frac{n\pi}{\sqrt{A}} \\
&= n\pi\hbar
\end{aligned}
$$

∎

このように，質量が位置に依存する場合の SWKB 条件は，$\hbar$, ω, g, h, α, β に依らずに成立することが分かる．

■ 議論

本小節では，古典的な形状不変系以外の系において，SWKB 条件が厳密に成り立つ系が存在することを示した．それは，質量が位置の依存性をもっているような空間において古典的な形状不変系に対応するような系であり，形状不変性を保っている．ただし，空間の変更に伴って，形状不変性の条件式や SWKB 条件に対して，適当な変更を加えている．そのため，本小節の結果は，系の形状不変性が SWKB 条件が厳密に成立するための必要条件であるという命題に対する反例というよりはむしろ，SWKB 条件に対して古典的な形状不変系が重要な役割を果たしていることの現れである，と解釈すべきである．SWKB 条件は，空間の変更に対しても，適当な変更を加えることで，古典的な形状不変系との対比において可解系を捉えるための指標としてのその役割を保ち続けることがいえる．

5.3.3 多添字系に対する SWKB 条件

系が形状不変性をもつことは，SWKB 条件が厳密に成立するための十分条件なのであろうか．これを否定する主張が文献 [27] ではなされているものの，前述の通り，この論文の解析には誤りが含まれる．そこで，本小節では，まず，文献 [27] における J. Bougie らの誤謬を指摘する．その上で，多添字系に対する SWKB 条件の解析の一般論を展開する．それ以降は，拡張動径振動子や一般の場合に対する SWKB 積分の計算結果を示してゆく．

本小節で得られる結論は，J. Bougie らの指摘 [27] 通り形状不変性をもちながら SWKB 条件が成立しない系が存在し，多添字系がその例である，というものである．

■ J. Bougie らの誤り

本項では，J. Bougie らが，彼らの一連の仕事：

[68] J. Bougie, *et al.*, "Generation of a complete set of additive shape-invariant potentials from an Euler equation," Phys. Rev. Lett. **105**, 210402 (2010).

[60] J. Bougie, *et al.*, "Supersymmetric quantum mechanics and solvable models," Symmetry **4**, 452 (2012).

[69] J. Bougie, *et al.*, "Generation of a novel exactly solvable potentials," Phys. Lett. A **379**, 2180 (2015).

[27] J. Bougie, *et al.*, "The supersymmetry WKB formalism is not exact for all additive shape invariant potentials," J. Phys. A **51**, 375202 (2018).

[70] J. V. Mallow, *et al.*, "Inter-relations between additive shape invariant superpotentials," Phys. Lett. A **384**, 126 (2020).

などで繰り返し犯している誤りを指摘する．

文献 [27] などに含まれる，J. Bougie らの誤りは，本質的には，形状不変変換におけるパラメータの変換を，$\hbar^0$ のオーダーをもつ，$\hbar$ に依存しないパラメータ a_i を用いて，

$$a_i \to a_{i+1} \equiv a_i + \hbar \tag{5.11}$$

としている点にある．これが間違いであることには，a_i が $\hbar^0$ のオーダーをもつのであれば，足し算 $a_i + \hbar$ は次元の異なるもの同士の足し算をしていることになり，物理的に意味をなさない，ということからすぐに気が付く．例えば動径振動子の場合を考えると，$a_i \equiv \ell$ となり，$\ell \to \ell + \hbar$ と変換することになるのだが，これは完全な誤りである．次元を考えれば，$\hbar\ell \to \hbar\ell + \hbar$ や $\ell \to \ell + 1$ となるのが正しい．この議論が意味をなすのは，$\hbar = 1$ の単位系を採用した場合のみである．

上述の誤りに起因して，文献 [27] には，スーパーポテンシャルの $\hbar$ 依存性に対する認識にも誤りがある．文献 [27] の式 (18) では，拡張動径振動子のスーパーポテンシャルを

$$W(x,\ell) = \frac{\omega x}{2} - \frac{\ell}{x} + \left(\frac{2\omega x\hbar}{\omega x^2 + 2\ell - \hbar} - \frac{2\omega x\hbar}{\omega x^2 + 2\ell + \hbar} \right)$$

とし，初めの 2 項が動径振動子（文献 [27] の表現をそのまま日本語に訳すのであれば「3 次元振動子」）のスーパーポテンシャル

$$W_0 = \frac{1}{2}\omega x - \frac{\ell}{x} \tag{5.12}$$

であるとしている．しかし，動径振動子の 2 項目の分母は，量子力学的な軌道角運動量を表しているので，$\hbar\ell$ とするのが正しい．$\hbar\ell$ に変更することで，形状不変変換におけるパラメータの変換は，

$$\hbar\ell \to \hbar\ell + \hbar \qquad \text{or} \qquad \ell \to \ell + 1$$

となり，前述の問題点は解決されている．つまり，形状不変変換におけるパラメータの変換は，式 (5.11) ではなく，$a_i \equiv \hbar\ell \sim \hbar^1$ とするか $a_{i+1} = a_i + 1$ としなければいけない．

ここまでで，文献 [27] の定式化が如何に問題があるか，充分に示された．最後に，波動函数の意味においても誤りであることを，学部レベルの量子力学の知識と比較することで確認する．式 (5.12) で表されるスーパーポテンシャルの系に対する Schrödinger 方程式は，固有函数を $\psi_n(x)$ として，

$$\left[-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\ell(\ell-\hbar)}{x^2}+\frac{1}{4}\omega^2x^2-\frac{\omega}{2}(2\ell+\hbar)\right]\psi_n(x)=2n\hbar\omega\psi_n(x) \tag{5.13}$$

である．これより，適当な規格化定数 $\mathcal{N}$ を用いて，固有函数は，

$$\psi_n(x)=\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{4\hbar}}x^{\frac{\ell}{\hbar}}L_n^{\left(\frac{\ell}{\hbar}-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\omega x^2}{2\hbar}\right)\ , \tag{5.14}$$

と求まる．他方，文献 [46] などの量子力学の教科書を見れば，動径振動子に対する固有函数 $\phi_n(x)$ は，軌道角運動量の量子数を ℓ' と書き，適当な規格化定数 $\mathcal{N}$ を用いて，

$$\phi_n(x)=\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{4\hbar}}x^{\ell'+1}L_n^{\left(\ell'+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\omega x^2}{2\hbar}\right)\ , \tag{5.15}$$

と書かれることが分かる．ただし，ポテンシャルは，$V(x)=\dfrac{\hbar^2\ell'(\ell'+1)}{x^2}+\dfrac{1}{4}\omega^2x^2$ と書き表されているとする．同じ量子力学のポテンシャル問題を解いているのだから，式 (5.14) と式 (5.15) とは，一致していなければならない．そのためには，

$$\ell=\hbar(\ell'+1) \tag{5.16}$$

である必要がある．これが意味していることは，形状不変変換において変換されるパラメータ $a_i\equiv\ell$ が，実際には $\hbar^1$ のオーダーをもつ，ということである．$a_i\equiv\ell$ が $\hbar^0$ のオーダーをもつとしてしまうと，$\hbar\neq1$ に対して，式 (5.14) と式 (5.15) とは常に異なるものになる．尚，式 (5.15) は，式 (3.19) と一致している．

■ 一般論

多添字系 $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{M},*)}$ に対して，SWKB 条件 (2.49) は，

$$I\equiv\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}}\sqrt{\mathcal{E}_{\mathcal{D};n}^{(\mathrm{M},*)}-\left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\phi_{\mathcal{D};0}^{(\mathrm{M},*)}(x)\right|\right)^2}\,\mathrm{d}x=n\pi\hbar \tag{5.17}$$

と書かれる．後に具体的に示されるように，SWKB 積分からは $\hbar$ の寄与を常に取り除くことができるので，以下では SWKB 積分を $\hbar$ で割った $I^{(\mathrm{M},*)}:=I/\hbar$ に着目する．$I^{(\mathrm{M},*)}$ を用いると，SWKB 条件 (5.17) は，

$$I^{(\mathrm{M},*)}=n\pi \tag{5.18}$$

となる．

$I^{(\mathrm{M},*)}$ は解析的には計算できないため，我々は，この積分値を数値的に計算し，その値と $n\pi$ とを比較することで，SWKB 条件成立の可否を調べる．SWKB 条件が成り立っていない場合，SWKB 条件がどの程度破れているか，ということも興味深い問題である．そこで，SWKB 条件 (5.18) の左辺の積分値と右辺の値との誤差率：

$$\mathrm{Err}:=\frac{I^{(\mathrm{M},*)}-n\pi}{I^{(\mathrm{M},*)}}\ , \tag{5.19}$$

も算出する．

計算結果をプロットした図の読み方を，ここで説明する．青い丸 (●) は $I^{(\mathrm{M},*)}$ の積分値を π で割ったものを表し，赤い四角 (□) はの誤差率 Err を表している．また，青の直線と赤の一点鎖線とは，それぞれ，式 (5.18) が厳密に成り立っている場合を示している．尚，誤差率に関しては，$\mathrm{Err} = 0$ 近傍での振る舞いを詳しくみるために，

$$\mathrm{Err} \to \mathrm{sgn}(\mathrm{Err}) 2^{\log_{10} |\mathrm{Err}|}$$

なるリスケールを行なってプロットしている．

■ 多添字系 (L) の場合

多添字系 (L) に対する SWKB 条件は，

$$I^{(\mathrm{M,L})} = \int_{a'_{\mathrm{L}}}^{a'_{\mathrm{R}}} \sqrt{4n - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \left| \phi^{(\mathrm{M,L})}_{\mathcal{D};0}(x) \right| \right)^2} \, \mathrm{d}\xi = n\pi \tag{5.20}$$

と書かれる．ただし， $a'_{\mathrm{L}}, a'_{\mathrm{R}}$ は ξ についての方程式：

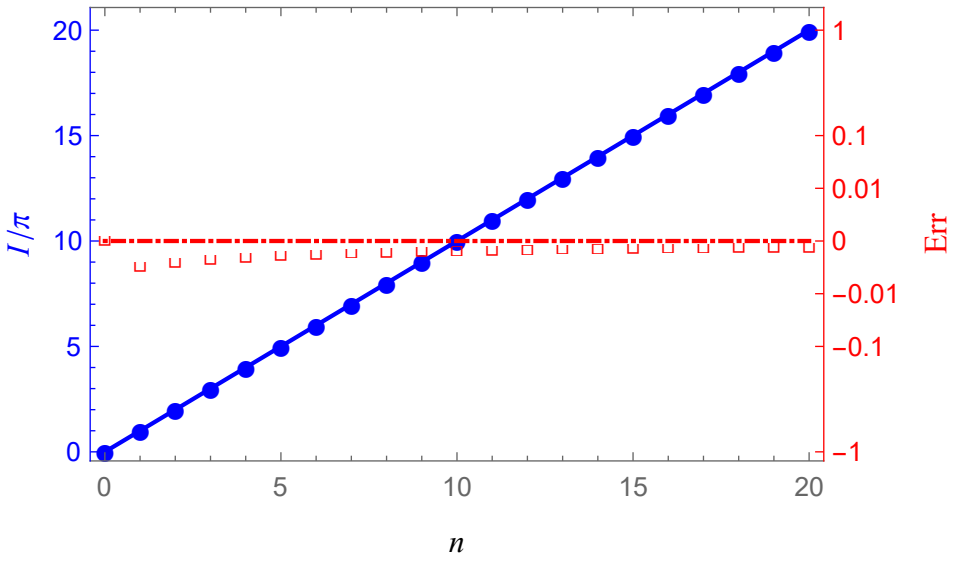
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \left| \phi^{(\mathrm{M,L})}_{\mathcal{D};0}(x) \right| \right)^2 = 4n \ .$$

の解である．多添字系 (L) に対する SWKB 条件 (5.20) には，$\hbar$ や ω が全く現れず，式 (5.20) は $\hbar, \omega$ に全く依存しない．

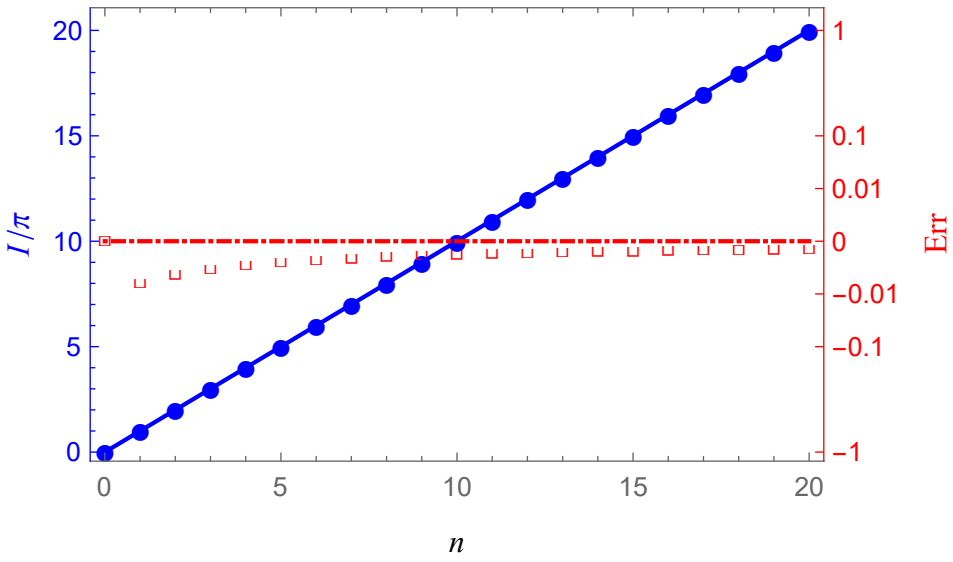
図 5.1 には，特定のパラメータの選択についての SWKB 条件 (5.20) に対する計算結果を示す．更に，前述の通り，拡張動径振動子は多添字系 (L) の特殊な場合：

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{I}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{II}} = \varnothing \cap \{1\} \ ,$$

である．このときの計算結果は，図 5.2 に示す．

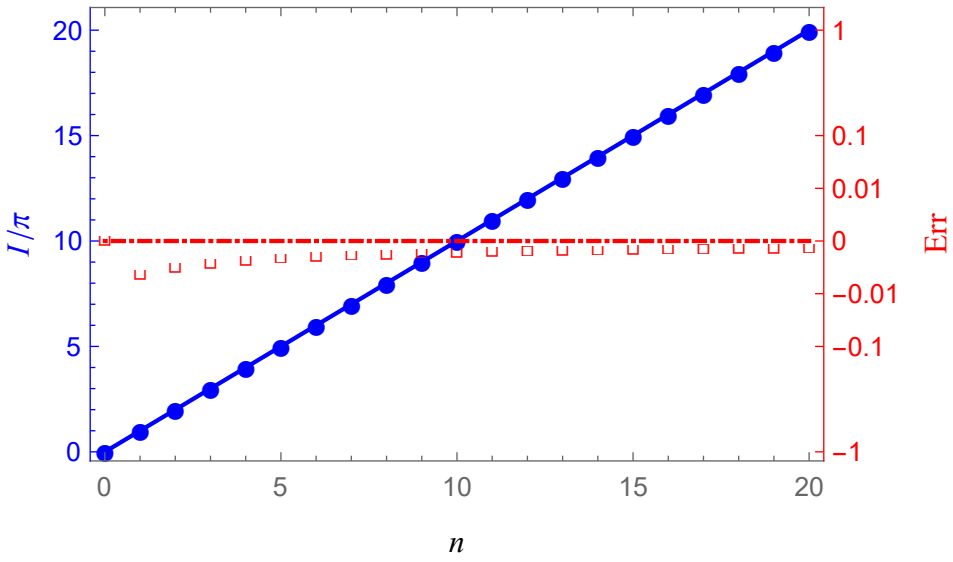


(a) $g = 5$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{I}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{II}} = \{1\} \cap \{2\}$ のとき.

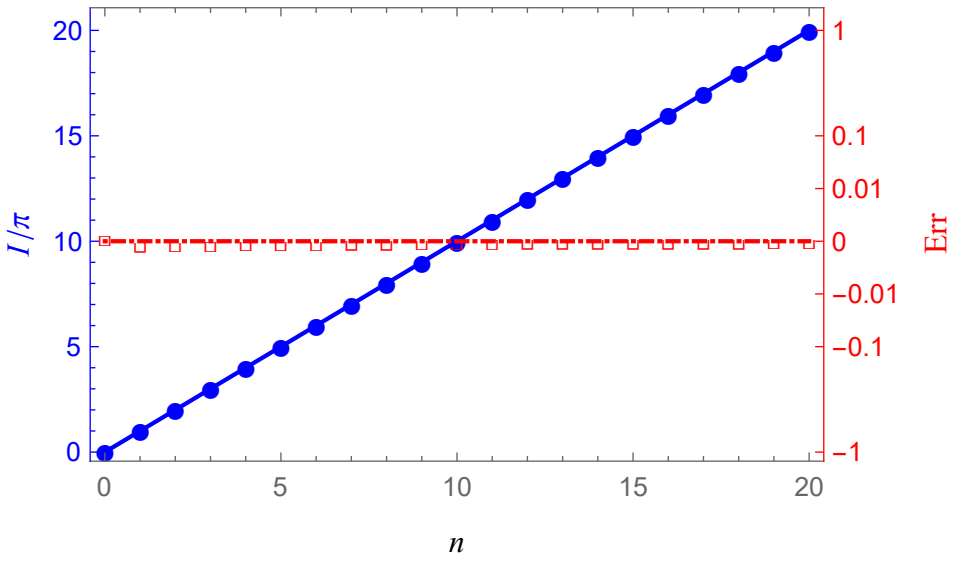


(b) $g = 10$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{I}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{II}} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$ のとき.

図 5.1　多添字系 (L) に対する SWKB 条件 (5.20) の計算結果.



(a) $g = 3$ のとき.



(b) $g = 10$ のとき.

図 5.2　拡張動径振動子の系に対する SWKB 条件 (5.20) の計算結果.

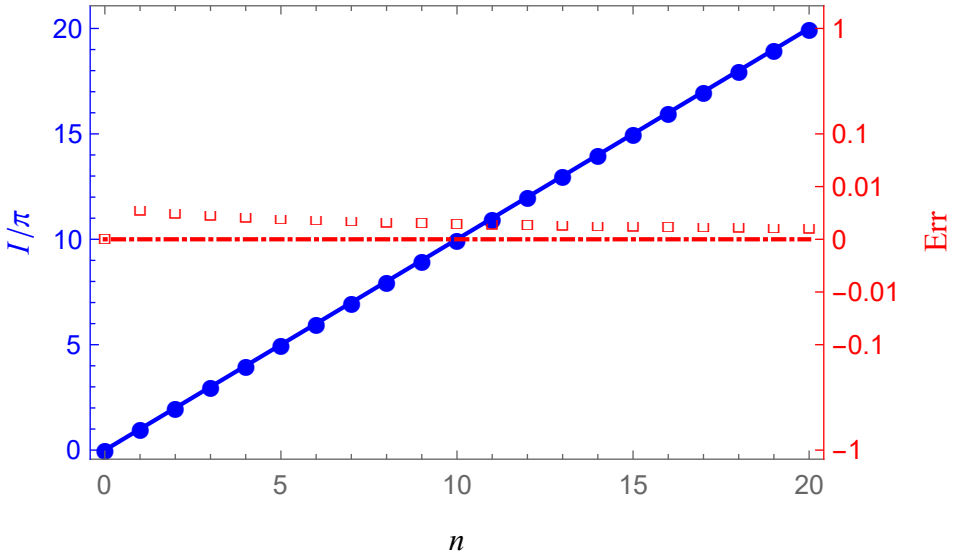
■ 多添字系 (J) の場合

多添字系 (J) に対する SWKB 条件は，

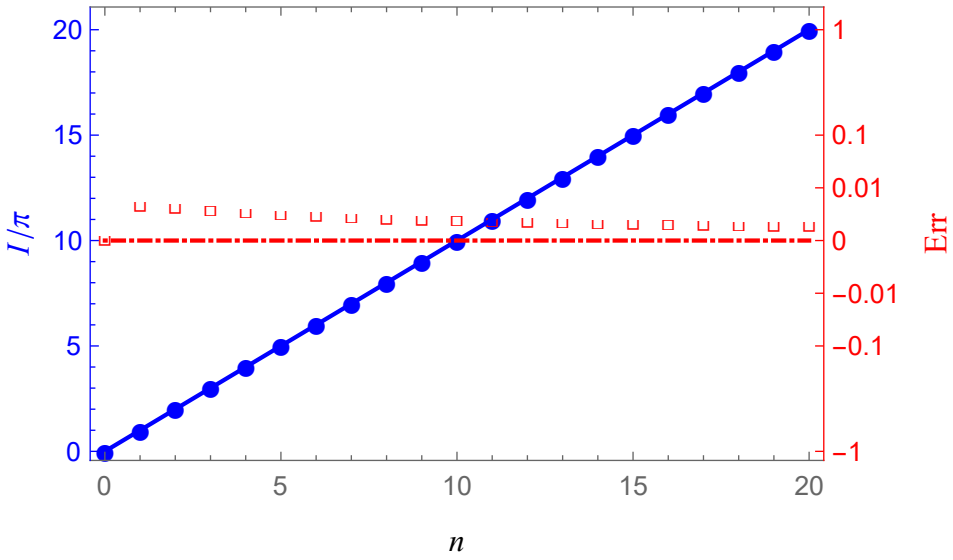
$$I^{(\mathrm{M,J})} = \int_{a'_{\mathrm{L}}}^{a'_{\mathrm{R}}} \sqrt{n(n+g+h) - (1-y^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln \left|\phi^{(\mathrm{M,J})}_{\mathcal{D};0}(x)\right|\right)^2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = n\pi \tag{5.21}$$

と書かれる．多添字系 (J) に対する SWKB 条件 (5.21) は，$\hbar$ に全く依存しない．

図 5.3 には，特定のパラメータの選択についての SWKB 条件 (5.21) に対する計算結果を示す．



(a) $(g,h) = (5,6)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{I}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{II}} = \{1\} \cap \{2\}$ のとき．



(b) $(g,h) = (5,6)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{I}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{II}} = \{1,2\} \cap \{2,3\}$ のとき．

図 5.3　多添字系 (J) に対する SWKB 条件 (5.21) の計算結果．

■ 議論

図 5.1, 5.2, 5.3 において，幾つかの典型的なパラメータについて，多添字系に対する SWKB 条件を調べた．いずれの場合においても，以下の 2 つの特徴が共通している：

- 誤差率 |Err| は $n = 1$ で最大値をとる．尚，誤差率の最大値は 10^{-3} 以下のオーダーである（表 5.1 参照）．

表 5.1　多添字系の場合における誤差率 |Err| の最大値

系（図番号）	誤差率 |Err| の最大値
多添字系 (L)（図 5.1a）	9.7×10^{-4}
多添字系 (L)（図 5.1b）	4.7×10^{-3}
多添字系 (J)（図 5.3a）	1.3×10^{-3}
多添字系 (J)（図 5.3b）	2.2×10^{-3}

- n が大きいほど誤差率は小さくなる．誤差率は，$n \to \infty$ の極限においてゼロになると考えられる．

また，パラメータの g や h が大きくなるほど誤差率は小さくなる．他方，多添字系 (L) と (J) とでは，以下の点で差異がみられる．つまり，SWKB 積分の値は，多添字系 (L) では常に過小評価に，多添字系 (J) では常に過大評価になっている．

以上の計算によって，形状不変であっても SWKB 条件が成立しない場合が存在することが確かめられた．つまり，形状不変性は SWKB 条件が成立するための十分条件ではない．これは，J. Bougie らの先行研究 [27] の主張と一致する．我々は，$\hbar$ に対する正しい取り扱いの下，SWKB 条件が成り立たない形状不変系の存在を確かめることができた．ただし，誤差率は常に 10^{-2} 以下の小さい値である．また，SWKB 条件 (5.18) は，適当な変数変換の下で，$\hbar$ に全く依存しない形で書き換えられることが分かった．これは新規な発見であり，SWKB 条件の理解に役立てられる．

尚，先行研究 [27] の解析は，我々の拡張動径振動子に対する解析に対応している．例えば，文献 [27] の図 6 における $\ell = 2$ の場合は，本論文における図 5.2a と同等なものである．

5.3.4　Krein–Adler 系に対する SWKB 条件

■ 一般論

Krein–Adler 系 $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{(\mathrm{K},*)}$ に対して，SWKB 条件 (2.49) は，

$$\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\mathcal{E}_{\mathcal{D};\check{n}}^{(\mathrm{K},*)} - \left(\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left|\phi_{\mathcal{D};0}^{(\mathrm{K},*)}(x)\right|\right)^2}\, \mathrm{d}x = n\pi\hbar \tag{5.22}$$

と書かれる．

Krein–Adler 系の場合，積分の端点を求める代数方程式：

$$\left(\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left|\phi_{\mathcal{D};0}^{(\mathrm{K},*)}(x)\right|\right)^2 = \mathcal{E}_{\mathcal{D};\check{n}}^{(\mathrm{K},*)} \ ,$$

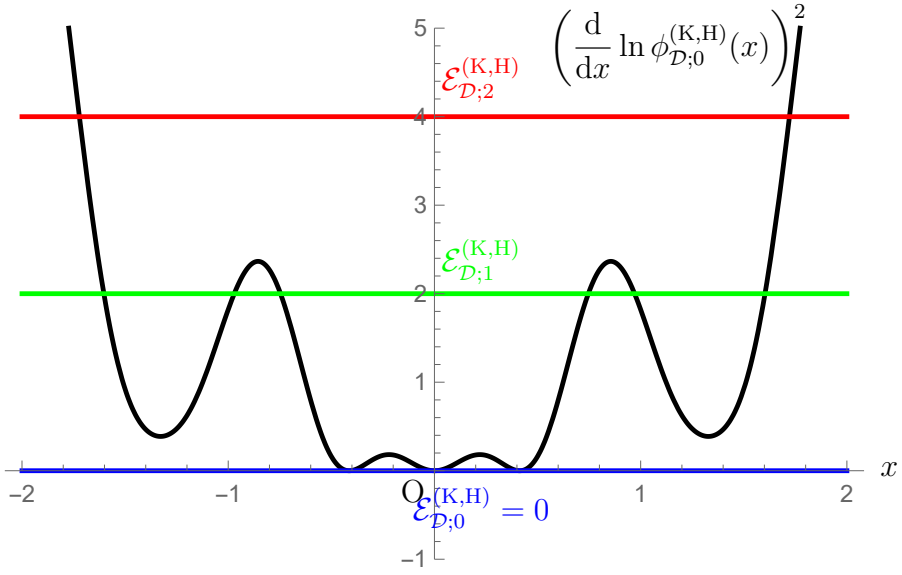


図 5.4　Krein–Adler 系 (H) のスーパーポテンシャル $W(x) = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\phi^{(\mathrm{K,H})}_{\mathcal{D};0}(x)$ の 2 乗．ただし，$\hbar = \omega = 1$, $\mathcal{D} = \{4, 5\}$ のとき．$n = 1$ に対しては，転回点が 2 組ある．

の解がふたつ以上存在する場合がある（図 5.4 参照）．この場合の積分の端点の決め方について，我々は，第ゼロ近似的に，次のような処方をとる．即ち，転回点の組 $\{a_{\mathrm{L},i}, a_{\mathrm{R},i}\}$ と書いて，式 (5.22) の左辺の積分に関して，全ての転回点の組ついて和をとる：

$$I^{(\mathrm{K},*)} := \frac{1}{\hbar}\sum_i \int_{a'_{\mathrm{L},i}}^{a'_{\mathrm{R},i}} \sqrt{\mathcal{E}^{(\mathrm{K},*)}_{\mathcal{D};\check{n}} - \left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\phi^{(\mathrm{K},*)}_{\mathcal{D};0}(x)\right|\right)^2}\,\mathrm{d}x = n\pi\ . \tag{5.23}$$

尚，SWKB 積分を $\hbar$ で割ったものを $I^{(\mathrm{K},*)}$ とおいているのは，多添字系の場合と同様に，SWKB 条件から $\hbar$ の寄与が常に取り除かれるためである．

$I^{(\mathrm{K},*)}$ も $I^{(\mathrm{M},*)}$ の場合と同様に解析的に計算できないので，また我々は，この積分値を数値的に計算し，その値と左辺の値とを比較することで，SWKB 条件成立の可否を調べる．更に，SWKB 条件 (5.22) の左辺の積分値と右辺の値との誤差率：

$$\mathrm{Err} := \frac{I^{(\mathrm{K},*)} - n\pi}{I^{(\mathrm{K},*)}}\ , \tag{5.24}$$

も算出する．計算結果をプロットした図の読み方は，多添字系の場合と同様である．

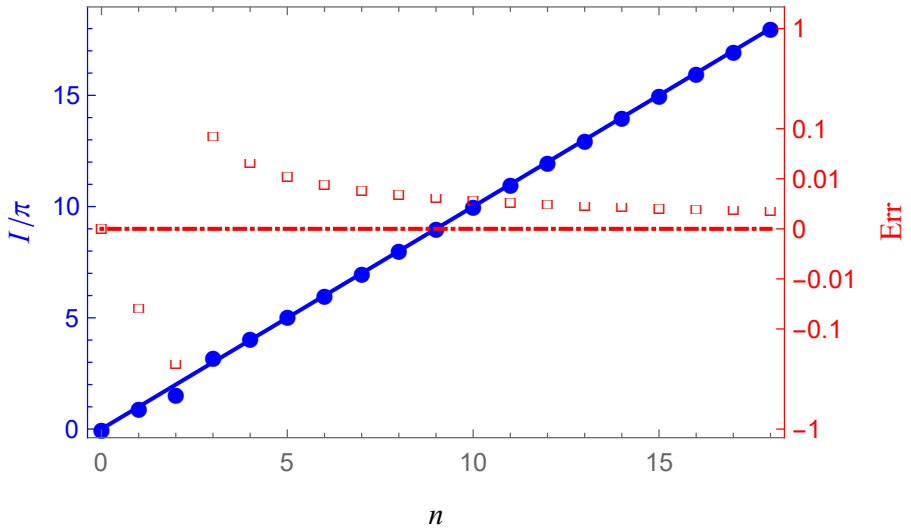
■ Krein–Adler 系 (H) の場合

Krein–Adler 系 (H) に対する SWKB 条件は，

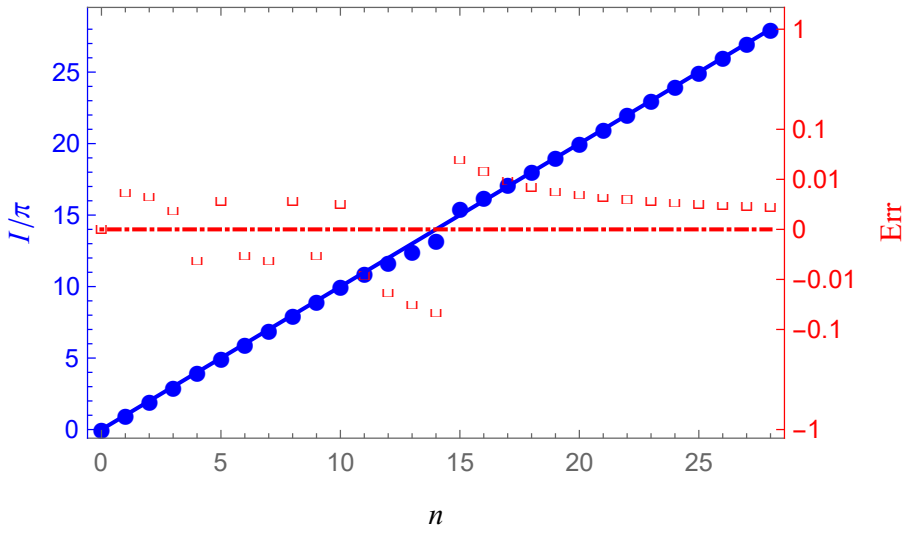
$$I^{(\mathrm{K,H})} = \sum_i \int_{a'_{\mathrm{L},i}}^{a'_{\mathrm{R},i}} \sqrt{2\check{n} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ln\left|\phi^{(\mathrm{K,H})}_{\mathcal{D};0}(x)\right|\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = n\pi \tag{5.25}$$

と書かれる．Krein–Adler 系 (H) に対する SWKB 条件 (5.25) は，$\hbar, \omega$ に全く依存しない．

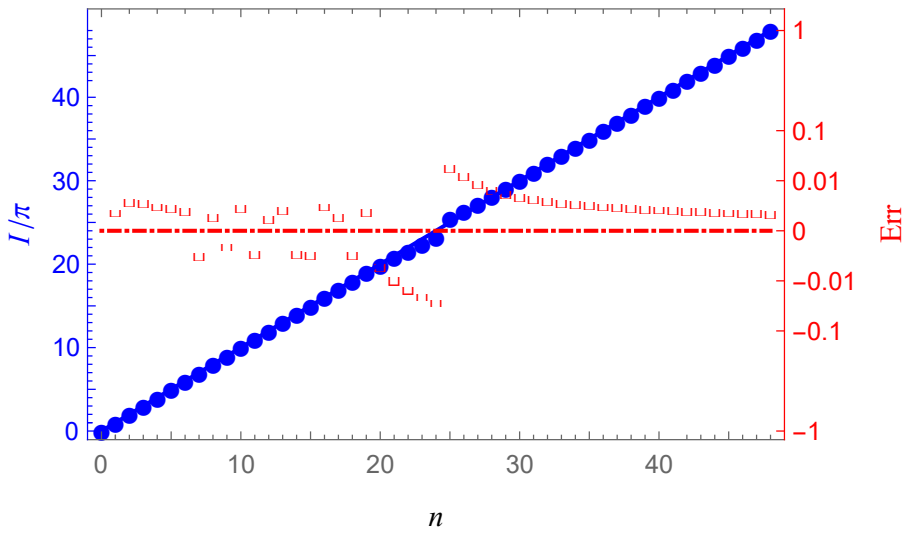
図 5.5 には，特定のパラメータの選択についての SWKB 条件 (5.25) に対する計算結果を示す．



(a) $\mathcal{D} = \{3, 4\}$ のとき.



(b) $\mathcal{D} = \{15, 16\}$ のとき.



(c) $\mathcal{D} = \{24, 25\}$ のとき.

図 5.5　Krein–Adler 系 (H) に対する SWKB 条件 (5.25) の計算結果.

■ **Krein–Adler 系 (L) の場合**

Krein–Adler 系 (L) に対する SWKB 条件は，

$$I^{(\mathrm{K,L})} = \sum_i \int_{a'_{\mathrm{L},i}}^{a'_{\mathrm{R},i}} \sqrt{\breve{n} - z \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln \left| \phi_{\mathcal{D};0}^{(\mathrm{K,L})}(x) \right| \right)^2} \, \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = n\pi \tag{5.26}$$

と書かれる．Krein–Adler 系 (L) に対する SWKB 条件 (5.26) は，$\hbar$ に全く依存しない．

図 5.6 には，特定のパラメータの選択についての SWKB 条件 (5.26) に対する計算結果を示す．

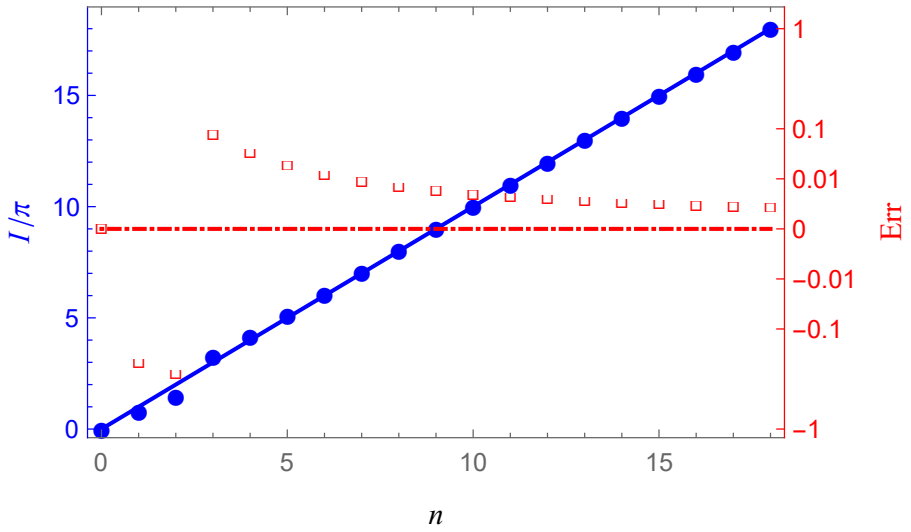
■ **Krein–Adler 系 (J) の場合**

Krein–Adler 系 (J) に対する SWKB 条件は，

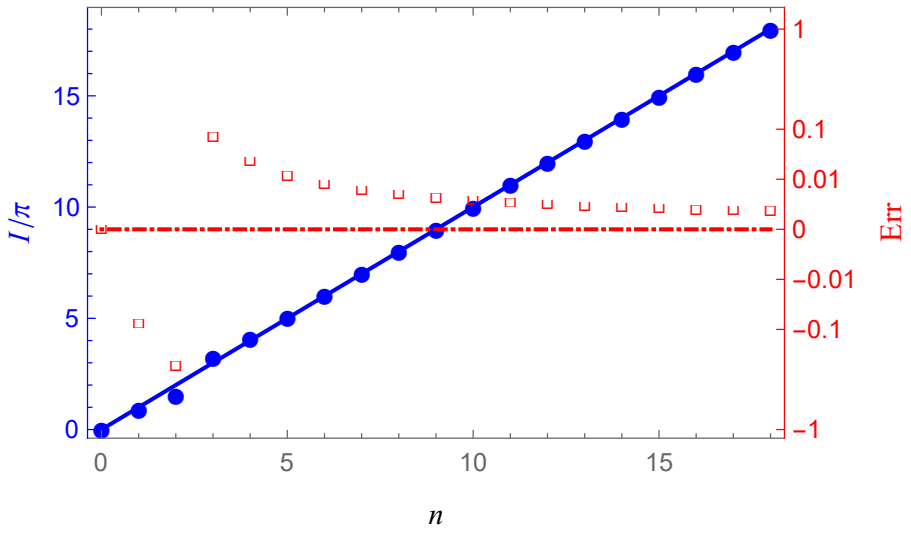
$$I^{(\mathrm{K,J})} = \sum_i \int_{a'_{\mathrm{L},i}}^{a'_{\mathrm{R},i}} \sqrt{\breve{n}(\breve{n}+g+h) - (1-y^2) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \ln \left| \phi_{\mathcal{D};0}^{(\mathrm{K,J})}(x) \right| \right)^2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = n\pi \ . \tag{5.27}$$

と書かれる．Krein–Adler 系 (J) に対する SWKB 条件 (5.27) は，$\hbar$ に全く依存しない．

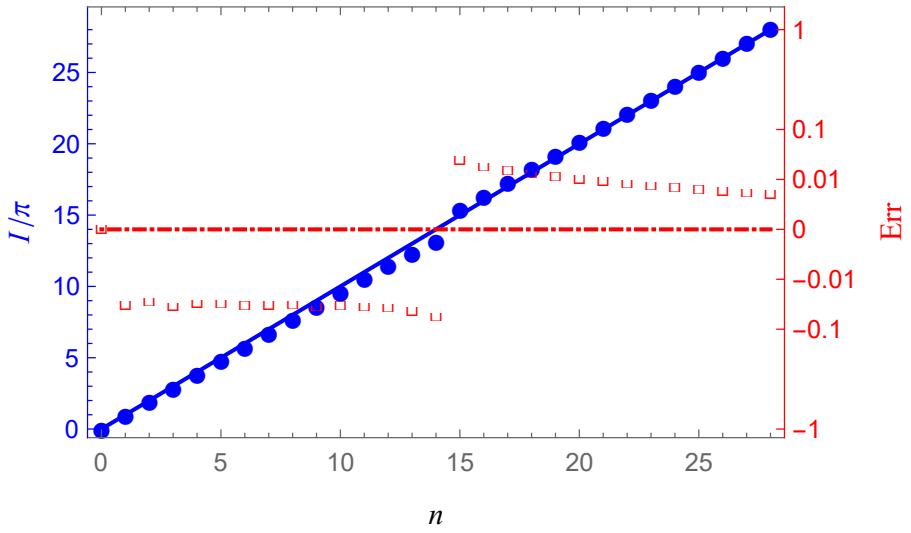
図 5.7 には，特定のパラメータの選択についての SWKB 条件 (5.27) に対する計算結果を示す．



(a) $g = 3$, $\mathcal{D} = \{3, 4\}$ のとき.

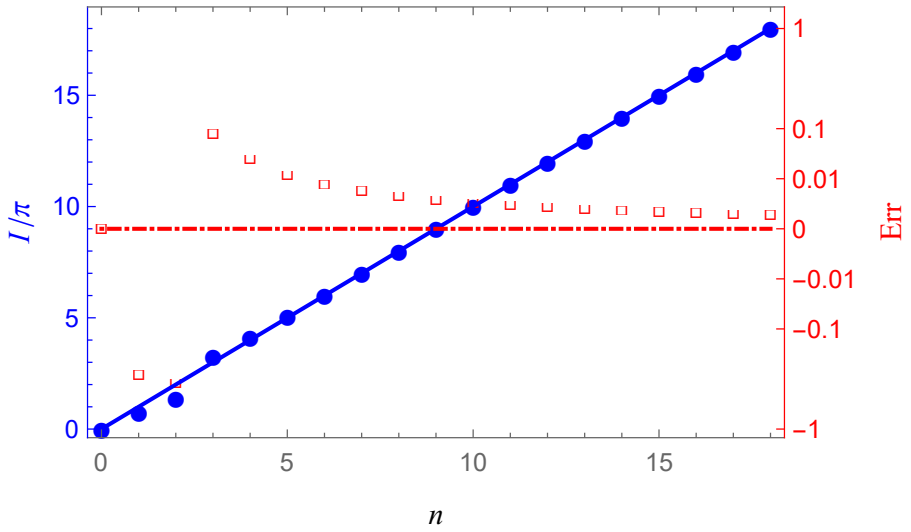


(b) $g = 30$, $\mathcal{D} = \{3, 4\}$ のとき.

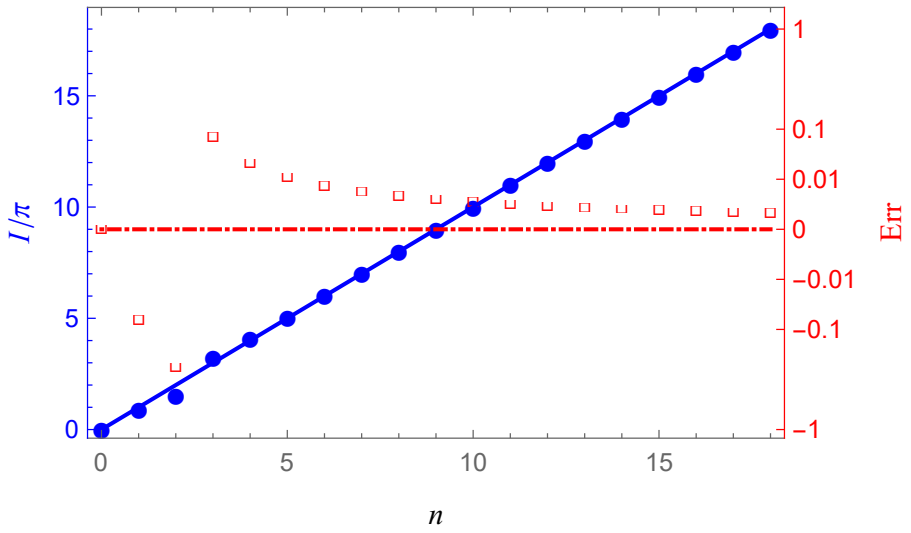


(c) $g = 3$, $\mathcal{D} = \{15, 16\}$ のとき.

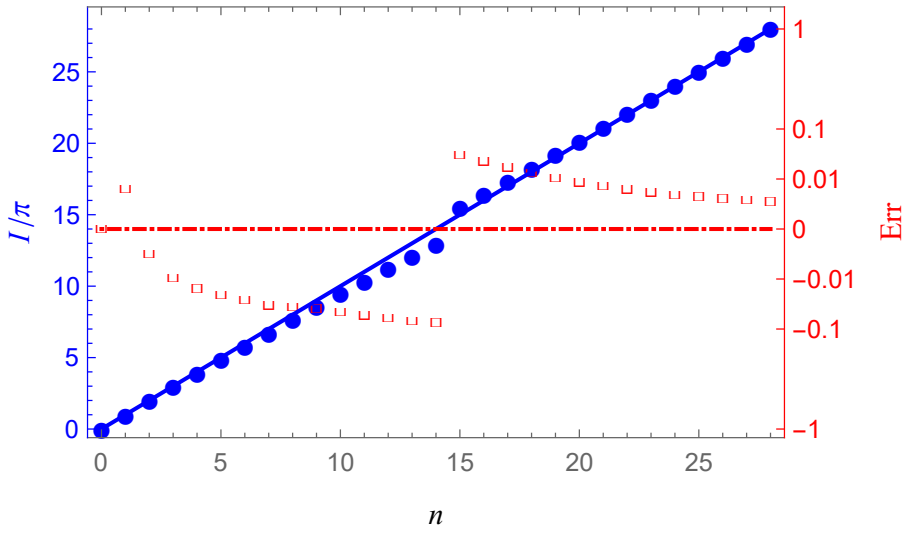
図 5.6　Krein–Adler 系 (L) に対する SWKB 条件 (5.26) の計算結果.



(a) $(g,h)=(3,4)$, $\mathcal{D}=\{3,4\}$ のとき.



(b) $(g,h)=(30,40)$, $\mathcal{D}=\{3,4\}$ のとき.



(c) $(g,h)=(3,4)$, $\mathcal{D}=\{15,16\}$ のとき.

図 5.7　Krein–Adler 系 (J) に対する SWKB 条件 (5.27) の計算結果.

■ 議論

図 5.5, 5.6, 5.7 において，いくつかの典型的なパラメータについて，Krein–Adler 系に対する SWKB 条件を調べた．いずれの場合においても，以下の特徴が共通している：

- 誤差率 |Err| は削除された準位 $\mathcal{D}$ の附近で最大値をとる．尚，誤差率の最大値は表 5.2 の通りである．
- 削除された準位から離れるほど誤差率は小さくなる．ただし，n が小さくなるときと n が大きくなるときとの振る舞いは，対称的でない．$n < d$ のときの振る舞いは，必ずしも誤差率がゼロに次第に近づいてゆく訳ではない．他方，$n > d$ では $n \to \infty$ において，誤差率は単調にゼロに近づいてゆく．

表 5.2　Krein–Adler 系の場合における誤差率 |Err| の最大値

系（図番号）	誤差率 |Err| の最大値
Krein–Adler 系 (H)（図 5.5a）	2.7×10^{-1}
Krein–Adler 系 (H)（図 5.5b）	5.6×10^{-2}
Krein–Adler 系 (H)（図 5.5c）	3.6×10^{-2}
Krein–Adler 系 (L)（図 5.6a）	3.4×10^{-1}
Krein–Adler 系 (L)（図 5.6b）	2.8×10^{-1}
Krein–Adler 系 (L)（図 5.6c）	6.5×10^{-2}
Krein–Adler 系 (J)（図 5.7a）	4.2×10^{-1}
Krein–Adler 系 (J)（図 5.7b）	2.9×10^{-1}
Krein–Adler 系 (J)（図 5.7c）	8.1×10^{-2}

2 点目に関して，詳しく述べる．$n < d$ のときの振る舞いは，必ずしも誤差率がゼロに次第に近づいてゆく訳ではないという点ではいずれも共通しているが，その具体的な振る舞いは大きく異なる．Krein–Adler 系 (H) の場合には，その誤差率は，$|\mathrm{Err}| = 0$ の周りで振動しているが，Krein–Adler 系 (L, J) では，その振動はみられない．残念ながら，我々は，これらの振る舞いに対する考察を未だもっていない．しかし，ここで最も重要なことは，この領域でも SWKB 条件が成り立っていない，ということである．

以上の計算から，Krein–Adler 系に対しては SWKB 条件が成立しないことが確かめられた．また，この場合も多添字系の場合と同様に，SWKB 条件 (5.23) は，適当な変数変換の下で，$\hbar$ に全く依存しない形で書き換えられることが分かった．

5.3.5　ここまでの解析から分かること

■ **SWKB 条件に関して**

5.3.3 節と 5.3.4 節では，多添字系と Krein–Adler 系に対して，SWKB 条件が $\hbar$ に全く依存しない形に書き換えられることを述べた．これは，本論文における重要な結論のひとつである．また，5.1.2 節で述べたように，SWKB 条件 (2.49) は WKB 量子化条件 (5.3) から導出されるも

のではなく，互いに独立な条件式である．従って，SWKB 条件 (2.49) には，半古典近似の意味は全くない．

しかしながら，WKB 量子化条件は古くから詳しく調べられてきたものであるから，SWKB 条件の解析を WKB 量子化条件の解析との対比において行うことは，意味のあることであり，我々の SWKB 条件に対する理解を一層深めることになることが期待される．WKB 量子化条件 (5.3) は，1 次元調和振動子と Morse ポテンシャルの問題に対して，厳密なエネルギー固有値を与えるものであった．SWKB 条件 (2.49) において，これらに対応する系は，古典的な形状不変系全てである．また，WKB 量子化条件は半古典近似を意味しており，これはパラメータ $\hbar$ の 1 次までを考慮に入れることによる近似である．我々は，SWKB 条件の理解は，WKB 量子化条件におけるパラメータ $\hbar$ の対応物を見出し，それに解釈を付けることによって為されると考える．以上の対応関係をまとめると，表 5.3 のようになる．

表 5.3　WKB 量子化条件と SWKB 条件との対応関係.

WKB 量子化条件 (5.3)	$\longleftrightarrow$	SWKB 条件 (2.49)
1 次元調和振動子 Morse ポテンシャル	$\longleftrightarrow$	全ての古典的な形状不変系
パラメータ $\hbar$: 半古典近似の意味をもつ	$\longleftrightarrow$	?

■ SWKB 条件の厳密性を保証するものに関して

前節における，Krein–Adler 系に対する SWKB 積分の計算結果から，以下のことがいえる：

- SWKB 条件は厳密には成り立っていないが，非常に良い近似である．
- 準位の削除が行われた付近で誤差が大きく，そこから離れるほど誤差は小さくなっていく．

これらから，SWKB 条件の破れに関して次のことが考えられる．つまり，Krein–Adler 変換によって，元の形状不変系から準位構造が変えられ（図 5.8 参照），それに伴って SWKB 積分の値も変わり，従って SWKB 条件が成立しなくなる，ということが起こっている．特に，Krein–Adler 変換によって構造が大きく変えられた準位の近傍に対しては，SWKB 条件の破れが比較的大きい．Krein–Adler 系は元の形状不変系から幾つかの準位を削除することで構成されるのであるから，以上を勘案すると，SWKB 条件の厳密性は，特定の系の準位構造，あるいは系の準位の分布によって保証されていると考えられる．ここで，「特定の」とは，具体的には，対応する古典的な形状不変系のことである．

このことを元に，SWKB 積分は，対応する古典的な形状不変系がもつ準位構造と注目している系がもつ準位構造との差異を表す量になっている，といえる．この視点から，SWKB 積分を計算することは，古典的な形状不変系に基づいて，可解系の新たな理解をすることになると考えられる．

ちなみに，多添字系に対する計算結果については，多添字系の構成法が“元の形状不変系から負準位を削除すること”に対応していることを考えると，以上の Krein–Adler 系の計算結果に対する解釈と同様の解釈をすることができる．

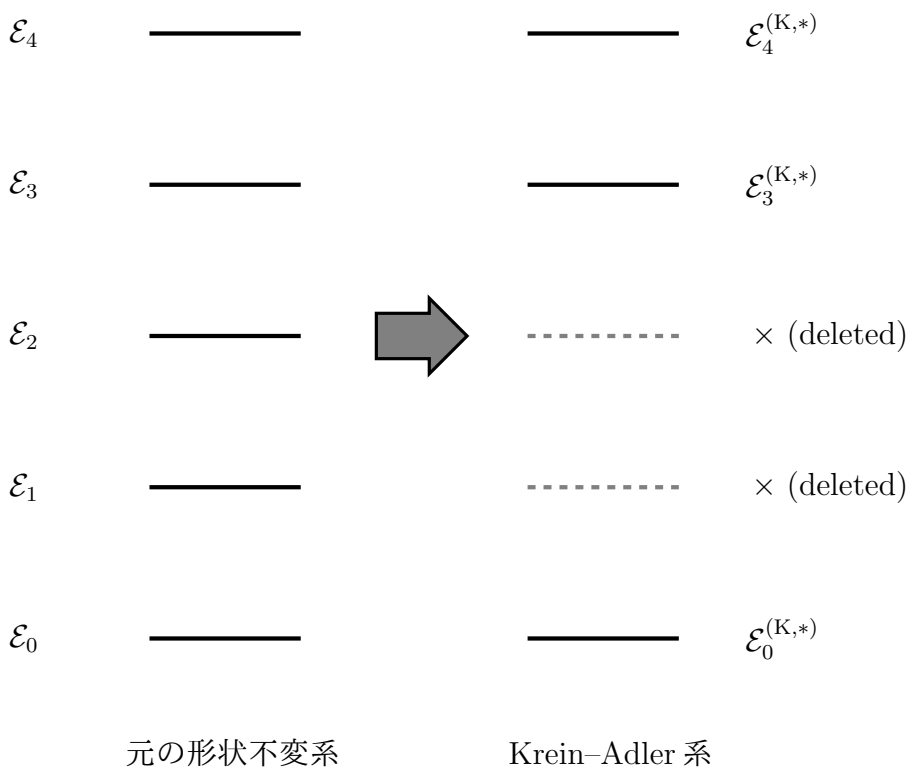


図 5.8　準位構造の変化の例.

5.4　条件付き可解系を用いたSWKB条件の数理的解釈

5.4.1　動機

前小節で述べたように，SWKB 積分の値と系の準位構造との間には，関連があるように思われる．このことをより詳しく調べるために，パラメータの変化によって準位構造を変形することができるような系を考えたい．ここまでに議論してきた Krein–Adler 系も，複数のパラメータの組 $\mathcal{D}$ で指定される準位の削除が行われているという点で，「パラメータによって準位構造を変形できる系」の一例となっている．他には，パラメータの変化によって準位が追加されたり，準位がシフトしたりすることなどが，準位構造の変形の例として挙げられる．準位のシフトとは，具体的に，以下の場合などが考えられる：

- ひとつの準位が（他の準位と縮退を引き起こさないように）シフトする.
- 複数の準位が（他の準位と縮退を引き起こさないように）同じ分だけシフトする.
- 複数の準位が（他の準位と縮退を引き起こさないように）ある規則に従って系統的にシフトする.

更に，パラメータの変化が準位構造の変形を引き起こさない，という例も，SWKB 積分の値と系の準位構造との関係を調べる上で有用である[註19]．これは，所謂「等スペクトル変形」である.

[註19] 些か逆説的な表現であるが，変形しないという変形である，という見方ができる.

これらの変形のうち，我々は，以下の変形を考える：

I. あるパラメータを連続的に変化させることによって，全ての励起状態が一様にシフトする．

II. 別のあるパラメータを連続的に変化させても，準位構造は変化しない（パラメータの連続変化が，ハミルトニアンの等スペクトル変形になっている）．

これら I, II の変形は，前段落で挙げた変形のうち最も単純な変形のひとつであるだけでなく，以下に述べるように，第 4 章で紹介した可解系との相性がよい．

我々は，SWKB 積分の値と系の準位構造との関係を調べるために，I, II を満たすようなパラメータたちを含む可解系を考えたい．特に，SWKB 積分の値と準位構造との関連をみるのに，あるパラメータを連続的に変化させることで，古典的な形状不変系から別の系に写るものを採用したい．我々は，このような可解系を既に知っている．4.5 節の条件付き可解系である．この系を解析することによって，我々は，準位構造の変化，即ちあるパラメータの変化に対して，SWKB 積分の値はどう振る舞うか，を調べることができる．以降，この小節では，最も簡単な Hermite の場合 (H)：

$$W(x;b,\beta)=\omega x+\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x)\ ,\quad u(x)={}_1F_1\left(-\frac{b}{4},\ \frac{1}{2};-\frac{\omega}{\hbar}x^2\right)+\beta\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{4},\ \frac{3}{2};-\frac{\omega}{\hbar}x^2\right) \tag{5.28}$$

のみを扱うことにする．

この系に含まれるパラメータは，

$$\hbar\ ,\quad \omega\ ,\quad b\ ,\quad \beta$$

の 4 つである．このうち，I の性質をもつのはパラメータ b で，II の性質をもつのはパラメータ β である．より詳細には，

I. パラメータ b を連続的に変化させることで，$n=0$ の基底状態を除く全ての励起状態のエネルギー固有値が，b だけシフトする，

II. パラメータ β を連続的に変化させても，どの状態のエネルギー固有値も変化しない，

といえる．b と β には，系の構成法から，式 (4.72), (4.75) の制約：

$$b>-2\ ,\quad |\beta|<\frac{2\Gamma\left(\frac{b}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{4}+\frac{1}{2}\right)}\ ,$$

が付く．その領域を図示すると，図 5.9 のようになる．また，$b=\beta=0$ のとき，この系は 1 次元調和振動子の場合に帰着する．尚，残りのパラメータ（$\hbar$ と ω）は，次に示すように，SWKB 積分には全く効いてこないため，ここでは考えない．

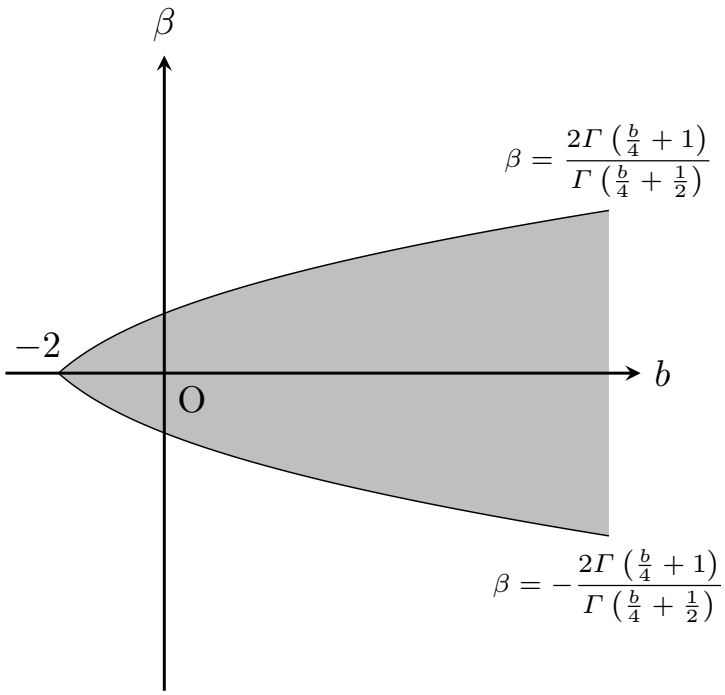


図 5.9　条件を満たす b と β の領域（影のついた部分）.

5.4.2　条件付き可解系に対する SWKB 条件

条件付き可解系 (H) の SWKB 条件は，$n = 0$ に対しては，

$$I^{(\mathrm{C,H})} := \frac{1}{\hbar}\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{0 - W(x;b,\beta)^2}\,\mathrm{d}x \equiv \frac{1}{\hbar}\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{0 - \left(\omega x + \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x)\right)}\,\mathrm{d}x = 0$$

であり，$n \geqslant 1$ に対しては，

$$\begin{aligned} I^{(\mathrm{C,H})} &:= \frac{1}{\hbar}\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{(2n+b)\hbar\omega - W(x;b,\beta)^2}\,\mathrm{d}x \\ &\equiv \frac{1}{\hbar}\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{(2n+b)\hbar\omega - \left(\omega x + \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x)\right)}\,\mathrm{d}x = n\pi \end{aligned} \tag{5.29}$$

と書かれる[註20]．SWKB 条件の式を $\hbar$ で割った表式を採用しているのは，5.3.4 節同様，この条件が $\hbar$ によらずに成立するものだからである．ここで，$x \to \xi \equiv \sqrt{\omega/\hbar}\,x$ なる変数変換を施せば，SWKB 条件 (5.29) は，

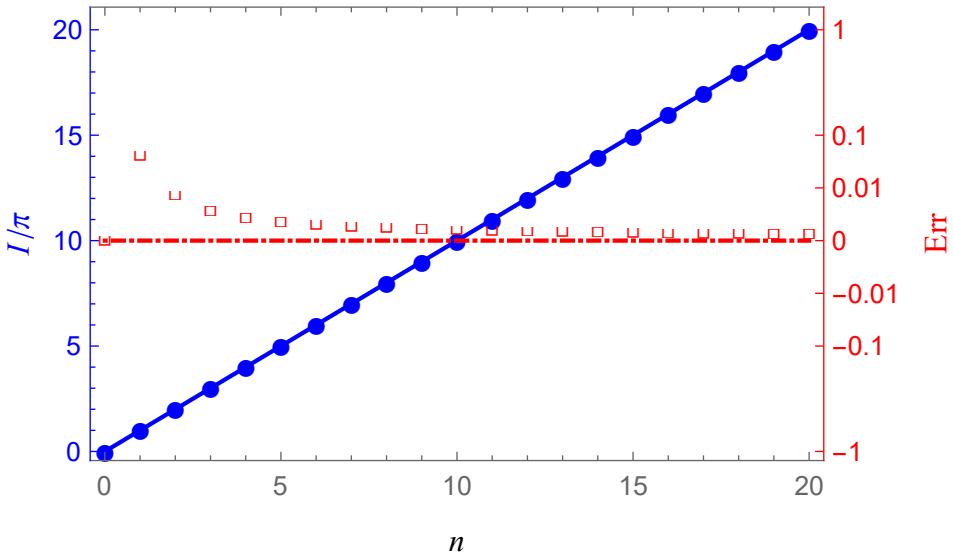
$$I^{(\mathrm{C,H})} = \int_{\tilde{a}_\mathrm{L}}^{\tilde{a}_\mathrm{R}} \sqrt{2n+b-\widetilde{W}(\xi;b,\beta)^2}\,\mathrm{d}\xi \equiv \int_{\tilde{a}_\mathrm{L}}^{\tilde{a}_\mathrm{R}} \sqrt{2n+b-\left(\xi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ln\tilde{u}(\xi)\right)}\,\mathrm{d}\xi = n\pi\ , \tag{5.30}$$

$$\tilde{u}(\xi) = {}_1F_1\left(-\frac{b}{4},\ \frac{1}{2};-\xi^2\right) + \beta\xi\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{4},\ \frac{3}{2};-\xi^2\right) \tag{5.31}$$

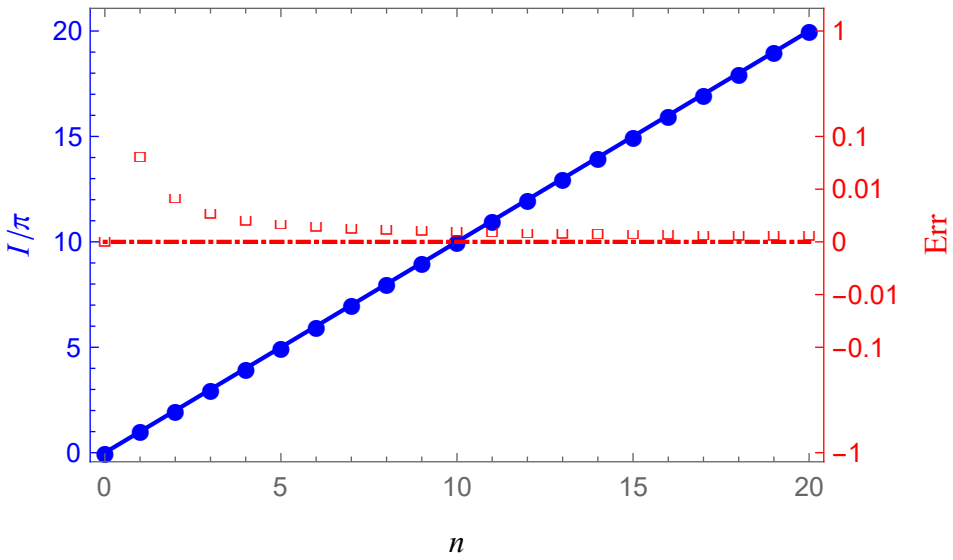
[註20] 本節で我々が興味を持っているのは，系の準位構造と SWKB 積分との関係である．実は，条件付き可解系の場合にも SWKB 積分の端点 $\{a_\mathrm{L}, a_\mathrm{R}\}$ が複数組存在することがある．しかし，議論を単純化させるため，本論文ではこの領域での議論は行わないことにする．

となる．式 (5.30) から分かるように，この系の SWKB 条件は，$\hbar$ と ω に全く依存しない形で書き下される．本小節では，以降，簡単のために，$\xi \to x$, $\check{\bullet} \to \bullet$ と表記する．

5.3.4 節と同様に，特定のパラメータの選択についての SWKB 条件 (5.30) に対する計算結果を，図 5.10, 5.11 に示す．いずれも，Krein–Adler 系に対する解析での議論と同様に，準位構造が大きく変えられた $n = 1$ のところで SWKB 条件の破れが最大となり，そこから離れるほど誤差は小さくなっている．

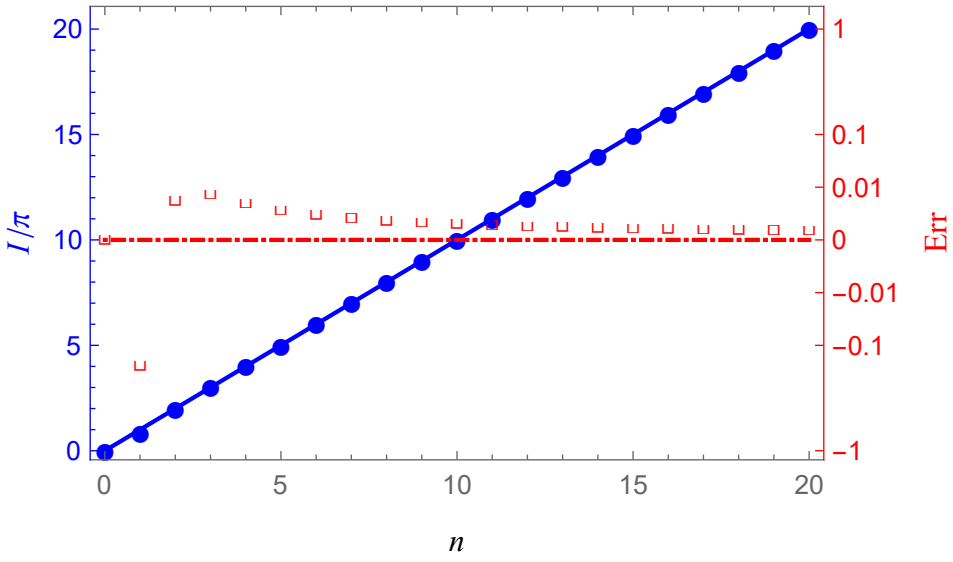


(a) $b = 1$, $\beta = 0.5$ のとき．

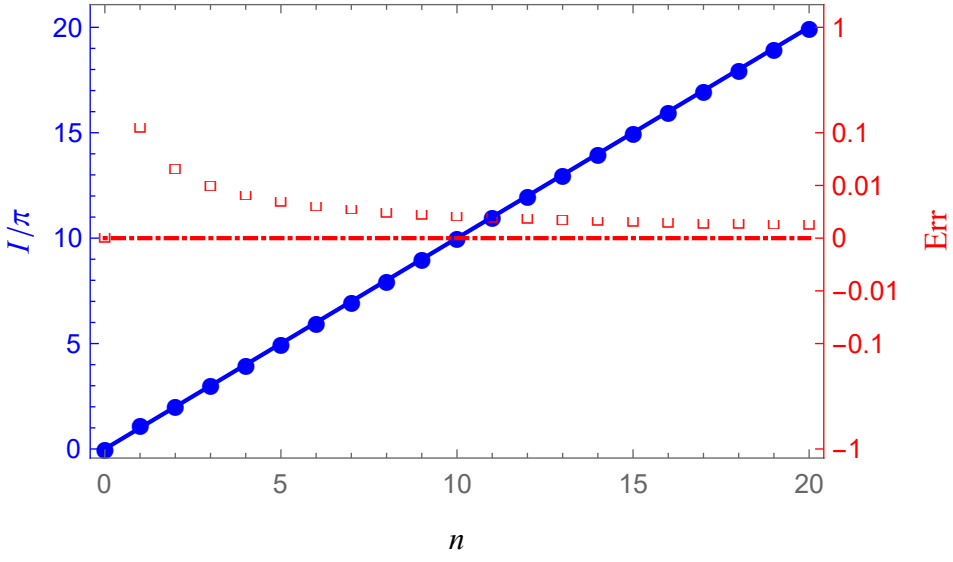


(b) $b = 1$, $\beta = 0$ のとき．

図 5.10　条件付き可解系 (H) に対する SWKB 条件 (5.30) の計算結果（その 1）．



(a) $b = -1$, $\beta = 0.5$ のとき.



(b) $b = 5$, $\beta = 0$ のとき.

図 5.11　条件付き可解系 (H) に対する SWKB 条件 (5.30) の計算結果（その 2）.

5.4.3　条件付き可解系を用いた SWKB 条件の解析

■　定式化

ここで,

- 条件付き可解系 は，古典的な形状不変系の変形で得られる（スーパーポテンシャルのに“摂動スーパーポテンシャル”が加わる）,
- SWKB 条件 (2.49) は，古典的な形状不変系（$b = \beta = 0$ の場合）に対して，厳密に成り立つ,

という2点を併せて考えると，$b \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ の場合における SWKB 積分の評価法に関して，次の考えに至る．つまり，大雑把にいえば，SWKB 積分 (5.30) を，1 次元調和振動子の SWKB 積分：

$$\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} \sqrt{2n - x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} \sqrt{(x + \sqrt{2n})(\sqrt{2n} - x)}\, \mathrm{d}x \ , \tag{5.32}$$

の近傍で展開する，という考えである．

この考えの具体的な定式化は，以下の通り．式 (5.30) の左辺に関して，

$$\begin{aligned}
&\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{2n + b - W(x;b,\beta)^2}\, \mathrm{d}x \\
=&\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)} \sqrt{1 + \frac{2n + b - W(x;b,\beta)^2 - (x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}}\, \mathrm{d}x \\
\cong&\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k} \left[\frac{2n + b - W(x;b,\beta)^2 - (x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)} \right]^k \right\} \mathrm{d}x \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k} \int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \frac{[2n + b - W(x;b,\beta)^2 - (x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)]^k}{[(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)]^{k-1/2}}\, \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.33}$$

という級数展開を考える．これは，結局，SWKB 積分の被積分函数 $\sqrt{2n + b - W(x;b,\beta)^2}$ を，

$$\frac{2n + b - W(x;b,\beta)^2 - (x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)} = 0$$

の周りでの Taylor 展開を考えていることになる．この展開のパラメータは，

$$b \to 0 \text{ かつ } \beta \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2n + b - W(x;b,\beta)^2 - (x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)} \to 0 \tag{5.34}$$

である．従って，

$$\frac{2n + b - W(x;b,\beta)^2 - (x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)} = 0$$

の周りで Taylor 展開することは，$b = \beta = 0$ の周りで Taylor 展開することと等価だと考えられる．

更に，式 (5.33) 最終行の級数は 0 次の項に

$$\int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{(x - a_\mathrm{L})(a_\mathrm{R} - x)}\, \mathrm{d}x \tag{5.35}$$

をもち，これは式 (5.32) と同じ形である．$b = \beta = 0$ のとき，

$$a_\mathrm{L} = -\sqrt{2n} \ , \quad a_\mathrm{R} = \sqrt{2n}$$

となり，これは式 (5.32) と完全に一致する．以上の意味で，式 (5.33) の展開は，1 次元調和振動子の場合 (5.32) の近傍での展開であると解釈できる．またこれは，古典的な形状不変系を中心に据えて種々の可解系を捉えていく，という我々の方針にも適合している．

■ 我々の定式化の適用範囲

本項では，式 (5.33) の展開が可能な，パラメータ b, β の領域を調べる．我々がこの領域に興味があるのは，この領域が，古典的な形状不変系を基準とした $I^{(\mathrm{C,H})}$ の評価，即ち，古典的な形状不変系を中心とする我々の定式化が，適用可能であるような領域を示しているからである．この領域のパラメータを選んだ場合，その系は，SWKB 条件の意味において，古典的な形状不変系の近傍に属する系であるという見方ができる．

式 (5.33) の級数展開において，収束半径を考えると，この Taylor 展開ができるのは，

$$-1 \leqslant \frac{2n+b-W(x;b,\beta)^2-(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}{(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)} \leqslant 1$$

$$\therefore \quad \max\left\{\left|\frac{2n+b-W(x;b,\beta)^2-(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}{(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}\right|; x\in[a_{\mathrm{L}},a_{\mathrm{R}}]\right\} \leqslant 1 \tag{5.36}$$

のときである．系のパラメータは b, β の 2 種なので，不等式 (5.36) を解くことで，式 (5.33) の展開ができるようなパラメータの組み合わせ $\{b,\beta\}$ が求められる．その解は，おおよそ，b, β が小さい領域である，と期待される．しかし残念ながら，不等式 (5.36) は，$a_{\mathrm{L}}, a_{\mathrm{R}}$ を決定する方程式が解析的に解けないことなどによって，数値的に解くしかない．以下では，$\beta = 0$ と $b = 0$ のふたつの場合についての具体的な計算結果を示した後に，最終的に得られる不等式 (5.36) を満たす b, β の領域を (b,β)-平面上に図示する．まず，$\beta = 0$ のとき，展開のパラメータは，

$$\frac{2n+b-W(x;b,0)^2-(a+x)(a-x)}{(a+x)(a-x)}$$

となる．ただし，この場合は $|a_{\mathrm{L}}| = |a_{\mathrm{R}}|$（$\equiv a$ とおく）である．このとき，式 (5.36) の左辺は，

$$\left|\frac{2n+b-a^2}{a^2}\right| \tag{5.37}$$

と計算される．式 (5.37) を $n = 1, 2, 3$ の場合についてプロットしたものが，図 5.12 である．更に，n 番目の準位に関して b の取り得る範囲を B_n と書けば，$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$ となることが確かめられる．よって，式 (5.33) の展開級数が準位に依らず収束するためには，b の範囲を B_1 とすればよい．

次に，$b = 0$ のとき，展開のパラメータは，

$$\frac{2n-W(x;0,\beta)^2-(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}{(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}$$

となる．このとき，式 (5.36) の左辺は，

$$\max\left\{\left|\frac{2n-W(x;0,\beta)^2-(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}{(-a_{\mathrm{L}}+x)(a_{\mathrm{R}}-x)}\right|; x\in[a_{\mathrm{L}},a_{\mathrm{R}}]\right\} \tag{5.38}$$

と書かれ，これ以上解析的には計算されない．式 (5.38) を $n = 1, 2, 3$ の場合についてプロットしたものが，図 5.13 である．

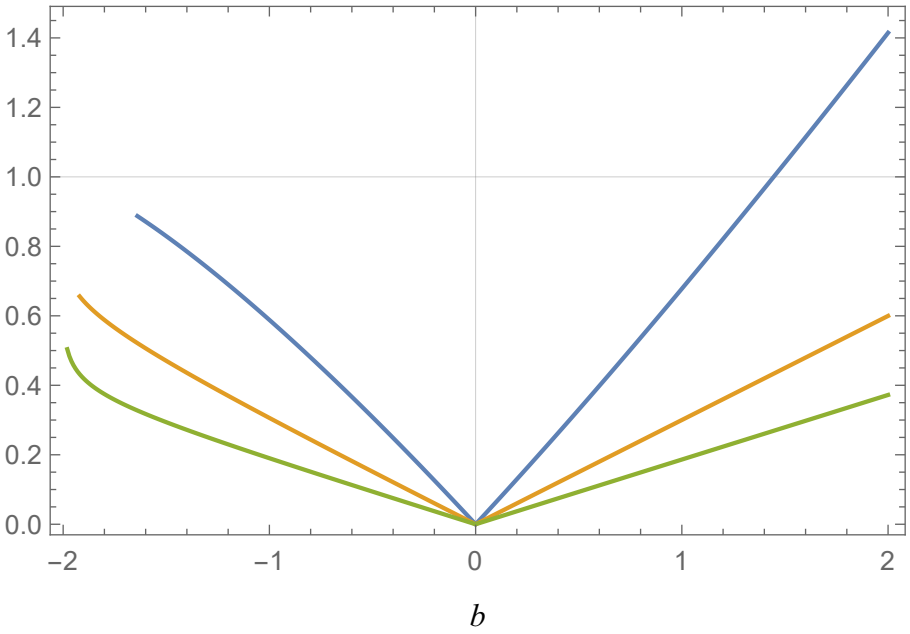


図 5.12　展開パラメータの最大値 (5.37) の計算結果．ただし，$n = 1$（青），$n = 2$（黄），$n = 3$（緑）の場合をプロットした．尚，b の下限が -2 でないのは，SWKB 積分の端点が複数組存在しないような領域のみを考えているからである．

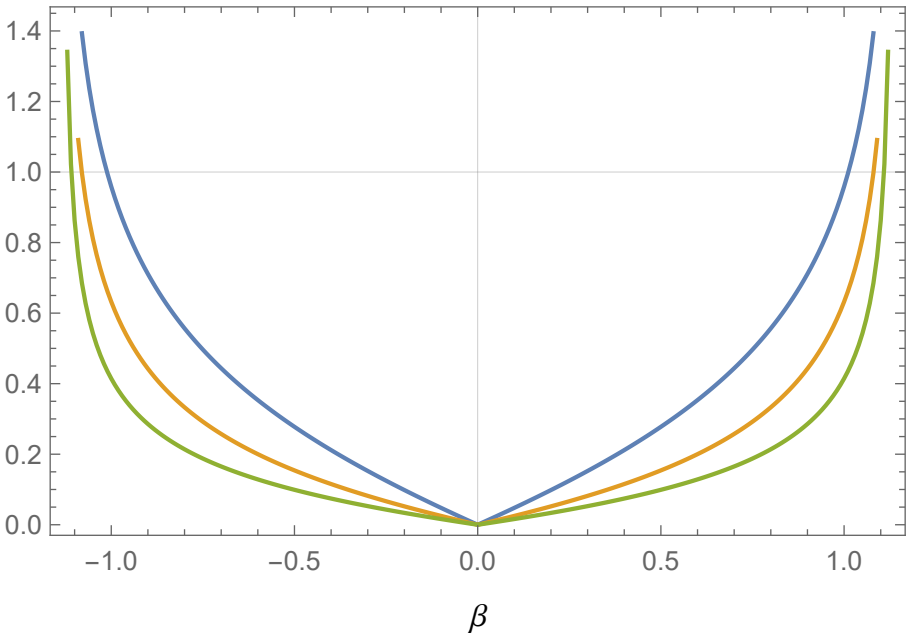


図 5.13　展開パラメータの最大値 (5.38) の計算結果．ただし，$n = 1$（青），$n = 2$（黄），$n = 3$（緑）の場合をプロットした．

これらのような計算を繰り返すことで，式 (5.36) を満たす b, β の領域は，$n = 1$ のとき，図 5.14 中で影をつけた部分のように求まる．また，$b \neq 0, \beta \neq 0$ の場合にも前の例と同様に，式 (5.33) の展開級数が準位に依らず収束するためには，この場合，β は $n = 1$ のときの β の取り得る範囲を考えれば良いことが計算で確かめられる．

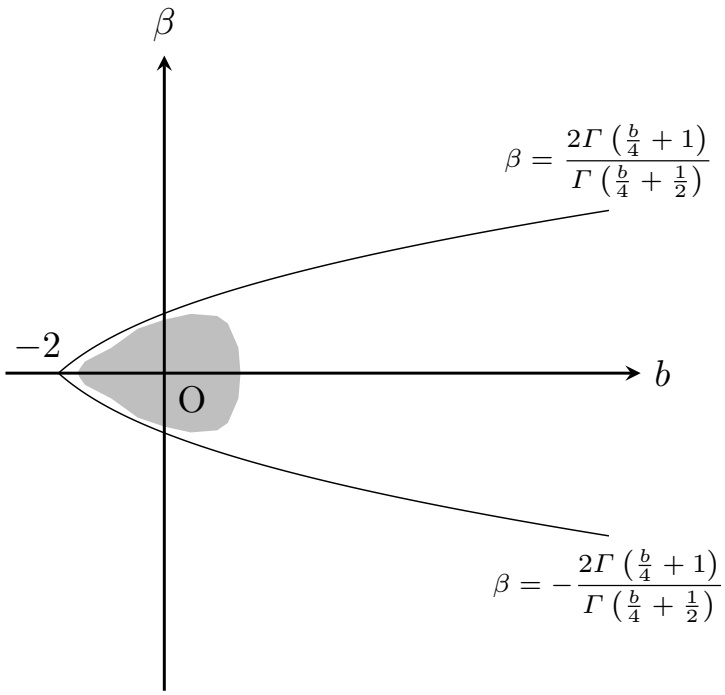


図 5.14　式 (5.33) の展開が可能な (b, β)-平面上の領域（影のついた部分）．ただし，$n = 1$ のとき．

■　$\beta = 0$ に固定したときの SWKB 積分の b 依存性 (I)

本項では，まず，SWKB 積分 $I^{(\mathrm{C,H})}$ の b 依存性を議論する．ただし，簡単のために，$\beta = 0$ とする．

SWKB 積分およびその展開は，

$$I^{(\mathrm{C,H})} = \int_{-a}^{a} \sqrt{2n + b - W(x; b, 0)^2}\, \mathrm{d}x \tag{5.39}$$

$$\cong \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k} \int_{-a}^{a} \frac{[2n + b - W(x; b, 0)^2 - (a+x)(a-x)]^k}{[(a+x)(a-x)]^{k-1/2}}\, \mathrm{d}x \tag{5.40}$$

と書かれ，これは明らかに b 依存性をもつ．尚，この場合，$W(x; b, 0)^2$ は偶函数になるので，$|a_{\mathrm{L}}| = |a_{\mathrm{R}}|$（$\equiv a$ とおく）である．例えば，$n = 1$ の場合について，この積分の計算結果は，図 5.15 のようになる．

図 5.15 から分かるように，（$b = 0$ 付近での）SWKB 積分 (5.39) の b 依存性について，以下のことがいえる：

- $b > 0$ の領域では，$I^{(\mathrm{C,H})} > n\pi$ となる．
- $b < 0$ の領域では，$I^{(\mathrm{C,H})} < n\pi$ となる．

尚，この振る舞いは $n = 1$ で特に顕著となるものの，$n \geqslant 2$ に対しても $b = 0$ 付近では，同じことがいえる．

式 (5.40) の展開が可能なのは，パラメータ b を図 5.14 の領域内から選んだ場合である．式 (5.40) について，展開の 3 次までを図 5.16 にプロットした．

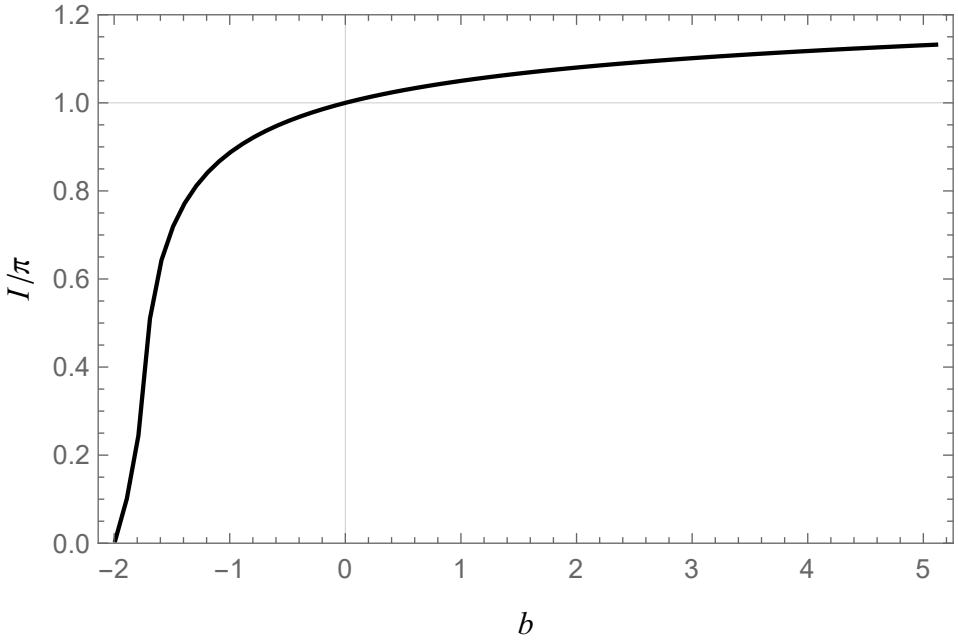


図 5.15　$\beta = 0$ に固定したときの SWKB 積分 (5.39) の計算結果（$n = 1$）.

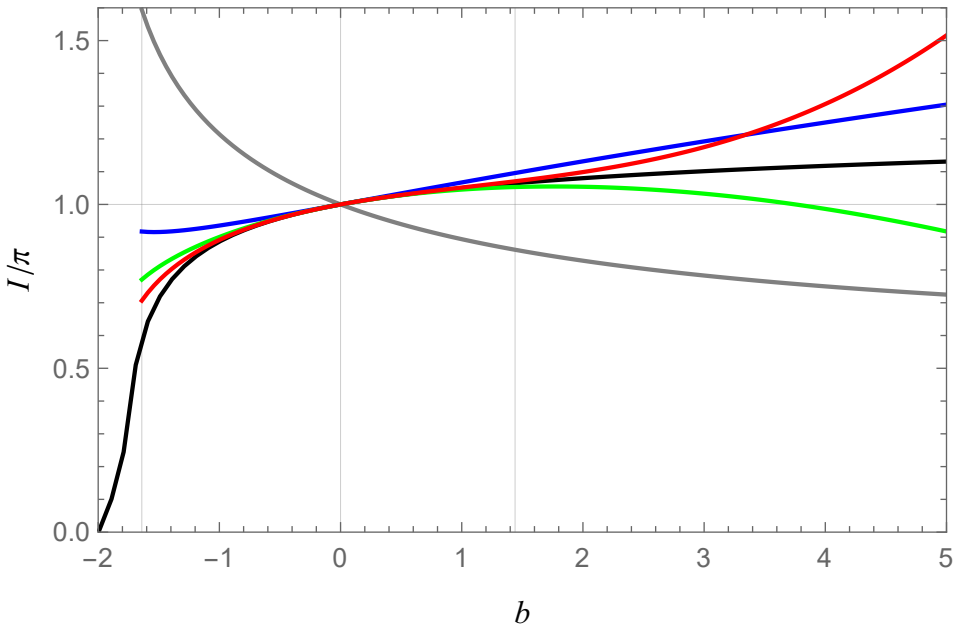


図 5.16　SWKB 積分及びその展開式 (5.39) の計算結果．ただし，展開の 0 次のみ（灰），1 次まで（青），2 次まで（緑），3 次まで（赤）の場合をプロットした．尚，展開級数が収束する b の範囲は，およそ -1.64 から 1.44 である．

■ $b = 0$ に固定したときの **SWKB** 積分の β 依存性 **(II)**

続いて，SWKB 積分 $I^{(\mathrm{C,H})}$ の β 依存性を議論する．ただし，簡単のために，$b = 0$ とする．SWKB 積分およびその展開は，

$$I^{(\mathrm{C,H})} = \int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{2n - W(x;0,\beta)^2}\,\mathrm{d}x \tag{5.41}$$

$$\cong \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k} \int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \frac{[2n - W(x;0,\beta)^2 - (-a_\mathrm{L}+x)(a_\mathrm{R}-x)]^k}{[(-a_\mathrm{L}+x)(a_\mathrm{R}-x)]^{k-1/2}}\,\mathrm{d}x \tag{5.42}$$

と書かれ，これは明らかに β 依存性をもつ．例えば，$n = 1$ の場合について，この積分の計算結果は，図 5.17 のようになる．

図 5.17 から分かるように，（$\beta = 0$ 付近での）SWKB 積分 (5.41) の β 依存性について，次のことがいえる．つまり，β の正負によらず，$I^{(\mathrm{C,H})} \approx n\pi$ であり，β 依存性がほとんど見られない．尚，この振る舞いは $n \geqslant 2$ に対しても同じことがいえる．

式 (5.42) の展開が可能なのは，パラメータ β を図 5.14 の領域内から選んだ場合である．式 (5.42) について，展開の 3 次までを図 5.18 にプロットした．

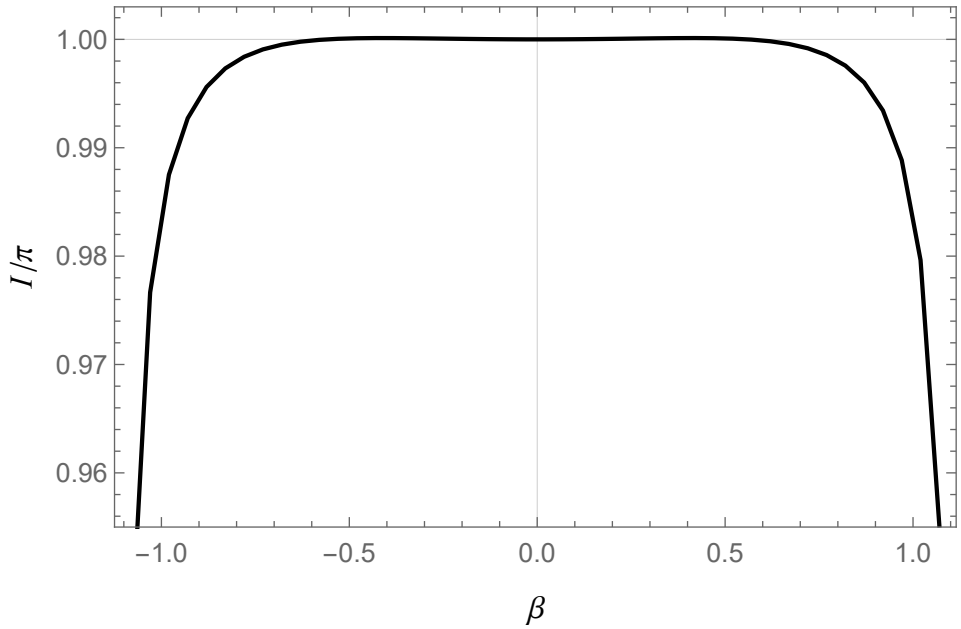


図 5.17　$b = 0$ に固定したときの SWKB 積分 (5.41) の計算結果（$n = 1$）．

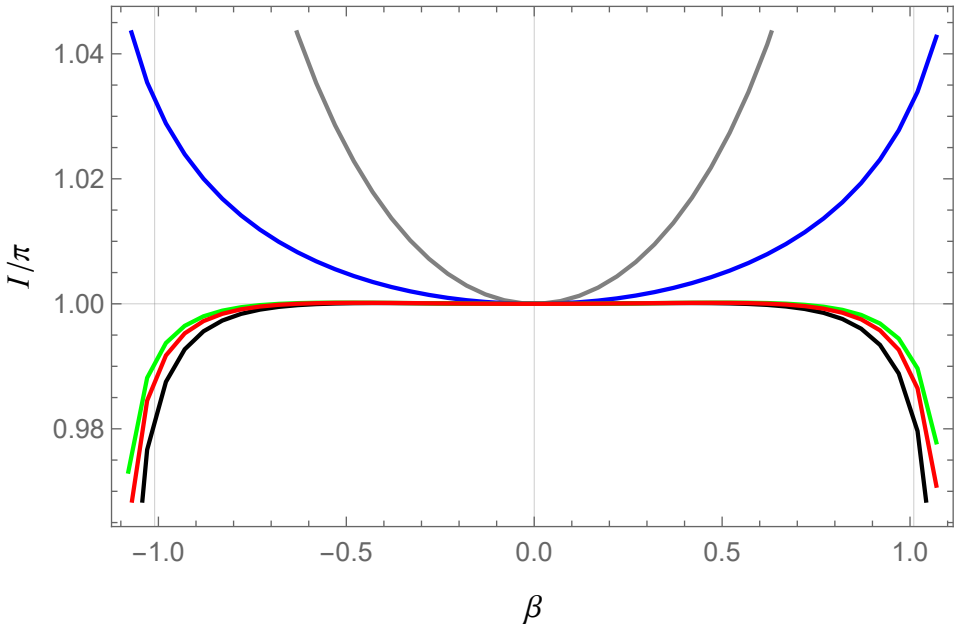


図 5.18　SWKB 積分及びその展開式 (5.41) の計算結果．ただし，展開の 0 次のみ（灰），1 次まで（青），2 次まで（緑），3 次まで（赤）の場合をプロットした．尚，展開級数が収束する b の範囲は，およそ -1.01 から 1.01 である．

尚，我々は，$b \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ の場合にもこれまでと同様の議論が可能であることを確かめている．

■　議論

本小節の議論から，条件付き可解系 (H) は，式 (5.33) の意味において，古典的な形状不変系との関係を定量的に記述することができる．ただし，この議論が有効なのは，系に含まれるパラメータ b, β が，図 5.14 中の影のついた領域にある場合である．

このような場合について，式 (5.33) の定式化は，SWKB 条件が破れる機構について，次のような解釈を与える．つまり，条件付き可解系 (H) と対応する古典的な形状不変系である 1 次元調和振動子の準位構造の差異が SWKB 積分の値に与える影響は，式 (5.33) における展開の高次項が効いてくることで引き起こされるものだ，という解釈である．1 次元調和振動子の場合には，式 (5.33) の表式に $k \geqslant 1$ の展開の高次項は現れず，ゼロ次 $(k = 0)$ のみを考えることになる．他方，展開の高次項が現れるのは，条件付き可解系 (H)（$b \neq 0$ または $\beta \neq 0$ の場合）を考えた場合である．図 5.16, 5.18 からは，条件付き可解系 (H) の場合には，ゼロ次 $(k = 0)$ に加えて，高次項の寄与を考えることで SWKB 積分の値を再現することが見てとれる．

また，以上のことから，SWKB 条件を通して条件付き可解系 (H) を捉え直すことで，特定のパラメータの範囲での条件付き可解系 (H) が，1 次元調和振動子の周りでの展開として理解できることが分かった．

5.5　本章の結論

我々は，SWKB 条件に着目し，古典的な形状不変系との対比において種々の可解系を評価した．このように SWKB 条件を可解系を捉え直す指標とすることは，我々の形状不変性を可解性の中心に据える立場とも適合し，また SWKB 条件の解析は全ての可解系に対して行えるという利点もある．

本章ではまず, SWKB 条件に対する基本的な理解として, 次の事柄を確かめた．第 1 に, SWKB 条件が WKB 量子化条件から導出されるものではなく，また実際には $\hbar$ に全く依らない条件であることと併せて，この条件式は半古典近似を意味しない（5.1.2 節）．第 2 に，古典的な形状不変系に対して SWKB 条件が厳密に成り立ち（5.2 節），古典的な形状不変系を質量が位置に依存する場合に拡張した模型に対しても，適当に拡張された SWKB 条件が厳密に成り立つ（5.3.2 節）．

次に，多添字系とよばれる新たな形状不変系に対しては SWKB 条件が厳密には成り立たないこと（5.3.3 節）を確かめた．形状不変系以外では SWKB 条件が成り立たないという先行研究の主張と併せて考えることで，種々の可解系に対して SWKB 条件の解析をすることが，その系を古典的な形状不変系との比較することになると分かる．

更に，Krein–Adler 系に対する SWKB 条件の解析をすることで，SWKB 条件の破れが，その系の準位構造と対応する古典的な形状不変系の準位構造との差異を捉えていることが分かった（5.3 節）．このことをより詳しく調べるために，条件付き可解系において，準位構造が変化することによって SWKB 条件の厳密性が破れることの定量的な評価を与え，特定のパラメータの範囲では条件付き可解系が古典的な形状不変系周りでの級数展開の形で理解できることを見出した（5.4 節）．

このようにして，我々は，SWKB 条件によって可解系の特徴，とりわけその系の準位構造と，対応する古典的な形状不変系の準位構造との差異に関する情報が得られることが分かり，種々の可解系を SWKB 条件の破れに基づいて捉え直す視点を得た，といえる．また，ここでの様々な議論を通して，古典的な形状不変系が可解系の中でも特に中心的で重要な意味をもっていることが間接的に確かめられた．

第6章

形状不変系の重ね合わせポテンシャル

本章は，概要における B. の研究に当たり，前章と共に，本論文の独自な研究の部分である．

本章の構成は，以下の通り．まず，6.1 節において，本章を通じて議論する問題の設定を述べる．6.2 節は，主に，我々と同様の問題を議論している先行研究 [71] のレヴューである．続く 6.3 節では，重いバリオンの質量スペクトルを例に，この系が実際の物理現象に応用可能であることを示す．6.4 節では，6.2 節の処方を（部分的に）改良する．我々は，問題の解法だけでなく，系自体の数理的な構造にも興味があり，形状不変系の代数構造を拡張したものによって，この系の数理構造の探索を行う．この議論は，6.5 節にある．本章の最後（6.6 節）では，B. の研究の結論を述べる．

6.1 問題設定

6.1.1 x の冪から成る複合ポテンシャル

本章では，

$$V(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + ax + bx^2 - \frac{c}{x}\ , \quad \ell,\ a,\ b,\ c > 0\ , \quad x \in [0, \infty) \tag{6.1}$$

の形で書かれるポテンシャルに対するポテンシャル問題を考える．この問題は，基底状態に関してのみ解析解が得られ，それ以外の励起状態は可解でない[註21]．しかしながら，2017 年に，励起状態のエネルギー固有値を近似的に計算する方法が，S. Bera らによって提案された [71]．S. Bera らの試みは，形状不変性の性質を非可解系の近似計算に応用したものである，といえる．

尚，式 (6.1) のポテンシャルは，x の冪を組み合わせた (mixed) ポテンシャルであり，その各項に対しては，次のような物理的解釈を付与することができる：

- $\dfrac{\ell(\ell+1)}{x^2}$ ： 遠心力ポテンシャル．
- ax ： 線形ポテンシャル．
- bx^2 ： 調和振動子．
- $-\dfrac{c}{x}$ ： Coulomb ポテンシャル．

このようなポテンシャルを考えることのできる実際の物理系として，重いバリオンの内部運動が挙げられる．この場合にポテンシャル (6.1) の各項が表す意味は，6.3 節で詳細に議論する．

[註21] 準可解系のひとつである．準可解系については，附録 D.1 を参照．

6.1.2　スーパーポテンシャルの重ね合わせ

■　一般論

4.5 節において，形状不変系を元に，条件付き可解系を構成した．そこでは，系のスーパーポテンシャルを，

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) \tag{4.60}$$

の形で導入した．式 (4.60) は，形状不変系のスーパーポテンシャル $W_0(x)$ と，別のスーパーポテンシャル $W_1(x)$ との重ね合わせである，と見ることができる．

2 つのスーパーポテンシャルの重ね合わせは，一般には，スーパーポテンシャル $W_{\rm A}(x)$ と $W_{\rm B}(x)$ に対して，

$$W(x) = \alpha W_{\rm A}(x) + \beta W_{\rm B}(x) \tag{6.2}$$

と書き表される．ただし，α, β は非負の定数で，$\alpha + \beta = 1$ を満たし，系 A と系 B との“混合比”を表している．つまり，α と β は，系 A と系 B との重ね合わせで構成された式 (6.2) の系において，それぞれの系の寄与がどの程度であるかを表している．例えば，$\alpha/\beta \gg 1$ であれば，式 (6.2) の系において系 A が支配的であることを表している．また，$\alpha/\beta \ll 1$ であれば，式 (6.2) の系において系 B が支配的であることを表している．

■　古典的な形状不変系同士の重ね合わせと x の冪から成る複合ポテンシャル

本項では，式 (6.2) の具体例として，動径振動子のスーパーポテンシャル：

$$W_{\rm R}(x) = \omega x - \frac{\hbar g_{\rm R}}{x} \ , \tag{6.3}$$

と Coulomb ポテンシャルのスーパーポテンシャル：

$$W_{\rm C}(x) = \frac{e^2}{2\hbar g_{\rm C}} - \frac{\hbar g_{\rm C}}{x} \ , \tag{6.4}$$

との重ね合わせを考える．この系のスーパーポテンシャルは，

$$\begin{aligned} W(x) &:= \varepsilon W_{\rm R}(x) + (1-\varepsilon) W_{\rm C}(x) = \varepsilon\omega x - \frac{\varepsilon\hbar g_{\rm R}}{x} + \frac{(1-\varepsilon)e^2}{2\hbar g_{\rm C}} - \frac{(1-\varepsilon)\hbar g_{\rm C}}{x} \\ &\equiv \varepsilon\omega x - \frac{\hbar(\ell+1)}{x} + \frac{(1-\varepsilon)c}{2\hbar(\ell+1)} \end{aligned} \tag{6.5}$$

である．ただし，

$$\varepsilon\hbar g_{\rm R} + (1-\varepsilon)\hbar g_{\rm C} \equiv \hbar(\ell+1) \ , \quad \frac{\ell+1}{g_{\rm C}} \cdot e^2 \equiv c$$

とおいた．また，ε は $0 < \varepsilon < 1$ である．本章では，以降，特に断らない限り簡単のため $\hbar = 1$ とおくことにする．

式 (6.5) の系では，ポテンシャル $V(x)$ は，

$$\begin{aligned} V(x) &= W(x)^2 - \frac{{\rm d}W(x)}{{\rm d}x} \\ &= \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)\omega c}{\ell+1} x + \varepsilon^2\omega^2 x^2 - \frac{c}{x} + \frac{(1-\varepsilon)^2 c^2}{4(\ell+1)^2} - \varepsilon\omega - 2\varepsilon\omega(\ell+1) \end{aligned} \tag{6.6}$$

と計算される．これは，定数分の差を除いて，式 (6.1) の形のポテンシャルである．従って，式 (6.1) の形のポテンシャルは，スーパーポテンシャルの意味において，動径振動子の系と Coulomb ポテンシャルの系とを重ね合わせた系である，と理解することができる．この意味において，この系は，可解系の周縁に存在する問題だと考えられる．

6.2 「解ける量子力学」の枠組みの限界と S. Bera らによる処方

6.2.1 「解ける量子力学」の枠組みの限界

式 (6.1) のポテンシャル問題を考える．2 章に示した「解ける量子力学」の枠組みに基づいて，この問題を解いてゆくことを考える．

まず，式 (6.1) 型のポテンシャルをもつ系のハミルトニアン：

$$\mathcal{H}^{[0]} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + ax + bx^2 - \frac{c}{x} - E_0 \ , \tag{6.7}$$

を，式 (2.8) のように因子化することを考える．ただし，E_0 は系の最低固有値である．

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + ax + bx^2 - \frac{c}{x} - E_0 \equiv \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + px - \frac{q}{x} + r\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + px - \frac{q}{x} + r\right) \ . \tag{6.8}$$

ここで，パラメータ $\{\ell, a, b, c\}$ を用いて，$\{p, q, r\}$ を書き下すことができれば，ハミルトニアンを因子化できたことになる．式 (6.8) の右辺を展開し，両辺の係数を比較することで，パラメータ $\{\ell, a, b, c\}$ と $\{p, q, r\}$ との関係式は，以下のように求まる．

$$\begin{cases} q(q-1) = \ell(\ell+1) \ , & \text{(6.9a)} \\ p^2 = b \ , & \text{(6.9b)} \\ 2qr = c \ , & \text{(6.9c)} \\ 2pr = a \ . & \text{(6.9d)} \end{cases}$$

また，基底状態のエネルギー固有値 E_0 は，パラメータ $\{p, q, r\}$ を用いて，

$$r^2 - 2pq - p = -E_0 \tag{6.10}$$

と表されることも分かる．式 (6.9) は，未知のパラメータ 3 つに対して，関係式が 4 つあるため，所謂「過決定系 (overdetermined system)」になっている．そこで，元のパラメータ $\{\ell, a, b, c\}$ に，それらが式 (6.9) を満たすような制約を課すことで，式 (6.8) の因子化を試みる．我々がパラメータ $\{\ell, a, b, c\}$ に課す条件は，

$$\ell + 1 = \frac{\sqrt{b}c}{a} \qquad \text{i.e.} \quad a = \frac{\sqrt{b}c}{\ell+1} \tag{6.11}$$

である．この下で，パラメータ $\{p, q, r\}$ は，

$$\begin{cases} p = \sqrt{b} \ , & \text{(6.12a)} \\ q = \dfrac{\sqrt{b}c}{a} = \ell + 1 \ , & \text{(6.12b)} \\ r = \dfrac{a}{2\sqrt{b}} = \dfrac{c}{2(\ell+1)} & \text{(6.12c)} \end{cases}$$

と決定される．また，基底状態のエネルギー固有値 E_0 は，$\{\ell, a, b, c\}$ を用いて，

$$E_0 = -\frac{a^2}{4b} - \frac{2bc}{a} + \sqrt{b} = -\frac{c^2}{4(\ell+1)^2} + 2\sqrt{b}(\ell+1) + \sqrt{b} \tag{6.13}$$

と書かれる．

また，基底状態の波動函数は，

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \sqrt{b}x - \frac{\ell+1}{x} + \frac{c}{2(\ell+1)}\right)\psi_0(x) = 0 \tag{6.14}$$

から，

$$\psi_0(x) = \mathcal{N} x^{\ell+1} \exp\left[-\frac{\sqrt{b}}{2}x^2 - \frac{c}{2(\ell+1)}x\right] \tag{6.15}$$

と求まる．ここで，規格化定数を $\mathcal{N}$ と書いた．

次に，第 1 励起状態について求めるために，ハミルトニアン (6.7) の超対称パートナーのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{[1]} &:= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + px - \frac{q}{x} + r\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + px - \frac{q}{x} + r\right) \\
&= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{q(q+1)}{x^2} + 2prx + p^2x^2 - \frac{2qr}{x} + r^2 - 2pq + p \\
&\equiv -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x^2} + ax + bx^2 - \frac{c}{x} + R\ .
\end{aligned} \tag{6.16}$$

ここで，

$$R \equiv r^2 - 2pq + p \tag{6.17}$$

であり，また ℓ_1 について，

$$\ell_1(\ell_1+1) = b(b+1) = (\ell+1)(\ell+2) \tag{6.18}$$

である．ここで，式 (6.16) のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ を半正定値化したものは，式 (6.7) のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ と同一の関数形をもつにも関わらず，因子化できない．このことは，次の事情による．仮に，

$$\mathcal{H}^{[1]} - \mathcal{E}_1 \equiv \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \tilde{p}x - \frac{\tilde{q}}{x} + \tilde{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \tilde{p}x - \frac{\tilde{q}}{x} + \tilde{r}\right)$$

とおいたとする．このとき，先ほどのパラメータ $\{p, q, r\}$ を決定する議論と同様に，パラメータ $\{\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}\}$ を決定しようとしてみる．パラメータ $\{\ell_1, a, b, c\}$ と $\{\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}\}$ に対して，

$$\begin{cases}
\tilde{q}(\tilde{q}-1) = \ell_1(\ell_1+1)\ , & \text{(6.19a)} \\
\tilde{p}^2 = b\ , & \text{(6.19b)} \\
2\tilde{q}\tilde{r} = c\ , & \text{(6.19c)} \\
2\tilde{p}\tilde{r} = a\ . & \text{(6.19d)}
\end{cases}$$

という 4 つの関係式を得る．パラメータ $\{\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}\}$ を決定するためには，$\{\ell_1, a, b, c\}$ の間に，

$$\ell_1 + 1 = \frac{\sqrt{b}c}{a} \qquad \text{i.e.} \quad a = \frac{\sqrt{b}c}{\ell_1+1} \tag{6.20}$$

という制約が課されるのだが，式 (6.18) より $\ell_1 = \ell + 1 \neq \ell$ であるため，式 (6.11) と両立し得ない．従って，「解ける量子力学」の枠組みを $\mathcal{H}$ の系 (6.7) に適用することはできず[註22]，基底状態以外の励起状態について解析解を得ることができない．この意味で，$\mathcal{H}$ の系 (6.7) は可解系ではない．

6.2.2 S. Bera らによる処方

本小節では，S. Bera らによる式 (6.1) 型のポテンシャルをもつ系のエネルギー固有値を求めるための処方 [71] を説明する．彼らの試みは，B. Chakrabarti らによる一連の「条件付き形状不変系 (conditional shape invariance)」に関する仕事 [72, 73, 74, 71, 75] の一部であり，この処方は形状不変性の性質を非可解系の近似計算に応用したものと理解できる．本論文において，条件付き形状不変系についての包括的なまとめは行わないものの，その意味は，本小節で明らかになる．尚，S. Bera らは，この系が形状不変形の重ね合わせであるという認識を持っていない．

新たなハミルトニアン $\widetilde{\mathcal{H}}^{[1]}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}^{[1]} &:= \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \sqrt{b}x + \frac{\ell_1+1}{x} - \frac{c}{2(\ell_1+1)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \sqrt{b}x + \frac{\ell_1+1}{x} - \frac{c}{2(\ell_1+1)}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{x^2} + a_1 x + bx^2 - \frac{c}{x} + \frac{c^2}{4(\ell_1+1)^2} - 2\sqrt{b}(\ell_1+1) - \sqrt{b}\,. \end{aligned} \tag{6.21}$$

ただし，

$$a_1 \equiv \frac{\sqrt{b}c}{\ell_1+1} \tag{6.22}$$

とした．S. Bera らは，このハミルトニアン $\widetilde{\mathcal{H}}^{[1]}$ に対して，「解ける量子力学」の枠組みからの類推で，

$$\mathcal{H}^{[1]} \simeq \widetilde{\mathcal{H}}^{[1]} + \widetilde{\mathcal{E}}_1 \tag{6.23}$$

という仮定をおいた．記号 $\simeq$ は，両辺が厳密に等しくはなく，あくまで近似的に等しいということを表している．また，

$$\widetilde{\mathcal{E}}_1 \equiv \frac{c^2}{4(\ell+1)^2} - 2\sqrt{b}(\ell+1) + \sqrt{b} - \left(\frac{c^2}{4(\ell_1+1)^2} - 2\sqrt{b}(\ell_1+1) - \sqrt{b}\right) \tag{6.24}$$

と計算される．この仮定の下で，元の系 $\mathcal{H}^{[0]}(6.7)$ の第 1 励起状態のエネルギー固有値は，

$$E_1 \simeq E_0 + \widetilde{\mathcal{E}}_1 = -\frac{c^2}{4(\ell_1+1)^2} + 2\sqrt{b}(\ell_1+1) + 3\sqrt{b} \tag{6.25}$$

と求まる．

更に，この処方を繰り返し行うことで，元の系 $\mathcal{H}^{[0]}(6.7)$ の第 n 励起状態のエネルギー固有値を次のように求めることができる：

$$\begin{aligned} E_n &\simeq -\frac{c^2}{4(\ell_n+1)^2} + 2\sqrt{b}(\ell_n+1) + (2n+1)\sqrt{b} \\ &= -\frac{c^2}{4(\ell+n+1)^2} + 2\sqrt{b}(\ell+1) + (4n+1)\sqrt{b}\,. \end{aligned} \tag{6.26}$$

[註22] 2 章でも述べた通り，「解ける量子力学」の枠組みは，**原理的には**常に適用できる．

ただし，ふたつ目の等号では，$\ell_n = \ell + n$ であることを用いた．また，このときのハミルトニアンは，

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{[n]} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\ell_n(\ell_n+1)}{x^2} + a_n x + bx^2 - \frac{c}{x} + \frac{c^2}{4(\ell_n+1)^2} - 2\sqrt{b}(\ell_n+1) - \sqrt{b} \tag{6.27}$$

であり，a_n は，

$$a_n \equiv \frac{\sqrt{b}c}{\ell_n+1} \tag{6.28}$$

である．

以上で紹介してきた，式 (6.1) 型のポテンシャル問題に対する S. Bera らの処方は，パラメータ $\{a, b, c\}$ をうまく選べば，非常によい近似解を与えることが確かめられている．具体的には，a の値が充分に小さければ，即ち b, c の値が充分小さいか ℓ_n が充分大きければよい．ただし，これ以上の近似の評価基準や評価式は，彼らによって与えられておらず，この近似解法には，数学的・数理的に確立したものだとはいえない．この議論を我々は，6.4 節において行う．

6.3 物理的応用例

本節では，式 (6.1) 型のポテンシャル問題が，実際の物理現象を記述し得る模型に応用されることを示す．尚，本節は，本研究 B. の一部を成すものの，他の節とは（6.2.2 節の結果を用いることを除いて）独立しているため，読み飛ばすことも可能である．

6.3.1 重いバリオンの質量スペクトル

■ 式 (6.1) 型のポテンシャル問題の物理的応用

式 (6.1) 型のポテンシャルは，線形項をもつことから，式 (6.1) 型のポテンシャルは強い相互作用をする系の有効模型となっていることが考えられる．特に，バリオンは，3 つのクォークから構成されていると考えることで，3 体問題としての扱いができる．更に，重いバリオン（後述）では，例えば Σ_{b}^{+} 粒子の質量は 5.8 GeV 程度で [76]，非常に重いことから，非相対論的取り扱いをしてもよいと考えられる．

一般に，N 体問題は，重心運動と内部運動とに分けて議論される（附録 E.4 参照）．重いバリオン系に対するこの有効模型では，内部運動が素粒子間の相互作用を記述しており，粒子の質量スペクトルを求めるには，内部運動のエネルギースペクトルを求めればよい．

以上から，我々は，式 (6.1) 型のポテンシャル問題を，重いバリオン系の質量スペクトルを求める問題に応用することを考える．ただし，座標 x は 3 粒子の位置関係に依存するので，例えば c/x の項は，3 体力としての Coulomb 型の相互作用を表していると解釈されるべきであって，2 粒子間の相互作用を記述しているとは解釈できないことに注意する必要がある．尚，座標 x の定義は，次小節で与える．この問題において，式 (6.1) 型のポテンシャルの各項に対して次のような解釈を与えることができる：

- 遠心力ポテンシャル $\dfrac{\ell(\ell+1)}{x^2}$ ： 3 体問題に対する“遠心力”，即ち“軌道角運動量”の効果を表す．
- 線形ポテンシャル ax ： 3 体力としての線形閉じ込めを表す．

- 調和振動子 bx^2 ： 2 体力の寄与を表す[註23].
- Coulomb ポテンシャル $-\dfrac{c}{x}$ ： 3 体力としての Coulomb 型の相互作用の寄与を表す.

■ 重いバリオン

以下，重いバリオンについて，簡単な説明を付しておく.

バリオン (baryon) [註24] は，3 つのクォーク[註25] から成る Fermi 粒子 ($qq'q''$) で，物質を構成する基本粒子である．バリオンは，強い相互作用をする粒子であるハドロンの一種である．ハドロンには，バリオンの他に，2 つのクォークから成る Bose 粒子 (qq') で，相互作用を媒介するメソンがある．バリオンの最も身近な例は，原子核を構成する陽子 (p) や中性子 (n) である.

特に，バリオンのうち少なくともひとつのボトム・クォーク (b)[註26] かチャーム・クォーク (c)（またはトップ・クォーク (t)）を含むものを，重いバリオン (heavy-quark baryon) という．近年，この重いバリオンが注目を集めている．それは，軽いクォークたち（アップ・クォーク (u)，ダウン・クォーク (d)，ストレインジ・クォーク (s)）の性質を知るのに役立ったり，軽いクォークと重いクォークとの間の相互作用の性質を知るのに役立つことが期待できるからである.

6.3.2 Hypercentral Constituent Quark Model

■ 概要

Hypercentral Constituent Quark Model (hCQM) [77][註27] は，バリオンの内部構造を記述する有効模型として，1995 年に M. Ferraris らによって導入された．バリオン内部のクォーク 3 体問題に対して，3 体力と 2 体力の寄与を“中心力”として扱った模型である（スピンの寄与はここに含まれない）．尚，バリオンの内部構造の 6 自由度のうち，“動径成分”以外の 5 成分は，超球面調和函数 [78, 79, 80]（附録 E.4.3 参照）を用いて表される.

このように N 体問題に対してその“中心力問題”を考える定式化は，バリオンの内部構造に限らず，物理や化学の分野において束縛状態のエネルギー固有値や散乱問題を解くのにしばしば用いられている.

[註23] 調和振動子型の 2 体力が働いていると考えると，その総和は，

$$\sum_{i<j} \frac{1}{2} k_{ij} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 \equiv bx^2 \tag{6.29}$$

と書かれる.

[註24] バリオン (baryon) の語源は，ギリシャ語で「重い」を意味する “$\beta\alpha\rho\upsilon\varsigma$” である.

[註25] クォーク (quark) は，J. Joyce の小説 *Finnegans Wake* にある一節：

Three quarks for Muster Mark!

に由来する.

[註26] 一部の物理学者は，ビューティー・クォーク (beauty quark) という名称を好む．また，それに伴って，トップ・クォークはトゥルース・クォーク (truth quark) とよばれることがある.

[註27] Constituent Quark Model (CQM): 構成子クォーク模型.

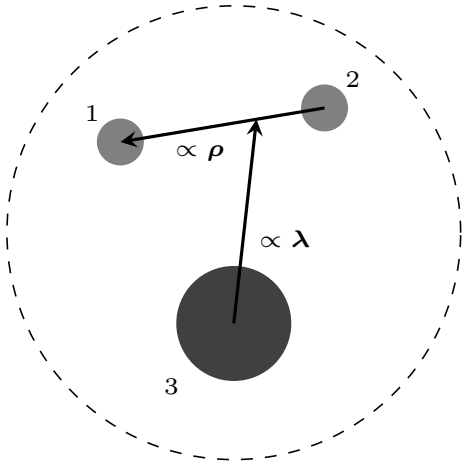


図 6.1　座標のとり方.

■ 座標系の設定

質量 m_1, m_2, m_3 の粒子 1, 2, 3 から成る 3 体系の問題を考える．粒子 1–3 の座標をそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ と書く．ここで，各座標に粒子の質量の重みを付けるような座標変換：

$$\boldsymbol{x}_i := \sqrt{\frac{m_i}{M}}\boldsymbol{r}_i \ , \quad i = 1, 2, 3 \ , \tag{6.30}$$

を考える [81]．ここで，M は参照質量 (reference mass) とよばれる，質量の次元をもったパラメータである．またこのとき，座標に関する微分演算は，

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_i} = \sqrt{\frac{m_i}{M}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_i} \ , \quad \boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{r}_i} = \frac{m_i}{M}\boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{x}_i} \tag{6.31}$$

などである．この座標変換によって，運動項 T は質量 m_i に依存しない形で書き換えることができる：

$$T = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\hbar^2}{2m_i}\boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{r}_i} = -\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{x}_i} \ . \tag{6.32}$$

尚，3 粒子が等質量の場合 $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$ の場合には，$M = m$ とすることで，この座標変換 (6.30) の必要はない：$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{r}_i$.

次に Jacobi 相対座標系（以降は簡単に，Jacobi 座標系と記す；附録 E.4.1 参照）を導入する．Jacobi 座標系 $\{\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3\}$ は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1 := \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1+m_2}}\boldsymbol{x}_1 - \sqrt{\dfrac{m_1}{m_1+m_2}}\boldsymbol{x}_2 \equiv \boldsymbol{\rho} \ , & \text{(6.33a)} \\ \boldsymbol{\rho}_2 := \sqrt{\dfrac{m_3m_1}{m_{\rm tot}(m_1+m_2)}}\boldsymbol{x}_1 + \sqrt{\dfrac{m_2m_3}{m_{\rm tot}(m_1+m_2)}}\boldsymbol{x}_2 - \sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{m_{\rm tot}}}\boldsymbol{x}_3 \equiv \boldsymbol{\lambda} \ , & \text{(6.33b)} \\ \boldsymbol{\rho}_3 := \sqrt{\dfrac{m_1M}{m_{\rm tot}}}\boldsymbol{x}_1 + \sqrt{\dfrac{m_2M}{m_{\rm tot}}}\boldsymbol{x}_2 + \sqrt{\dfrac{m_3M}{m_{\rm tot}}}\boldsymbol{x}_3 \equiv \boldsymbol{R}_{\rm CM} \ , & \text{(6.33c)} \end{cases}$$

で定義される（図 6.1 参照）．$m_{\rm tot}$ は，系の全質量を表している：$m_{\rm tot} := m_1 + m_2 + m_3$．また，

$\boldsymbol{\rho}_3 \equiv \boldsymbol{R}_{\rm CM}$ は，系の質量中心（重心）を表している：

$$\boldsymbol{R}_{\rm CM} := \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{r}_i}{m_{\rm tot}} \ .$$

ここで，式 (6.33) を

$$\boldsymbol{\rho}_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \boldsymbol{x}_j \tag{6.34}$$

と書くと，係数行列 c_{ij} について，

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ji} c_{ik} = \delta_{jk} \tag{6.35}$$

という関係が成り立っている．尚，前述の通り我々が興味があるのは系の内部運動なので，これ以降は $\{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}\}$ についてのみ議論する．

$\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}$ は，それぞれ 3 次元空間内のベクトルであり，自由度は全部で 6 である．これらを極座標表示で，$\boldsymbol{\rho} = (\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho)$，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \theta_\lambda, \varphi_\lambda)$ と書くことにする．このとき，ハイパー動径 (hyperradius) x を

$$x := \sqrt{\rho^2 + \lambda^2} \tag{6.36}$$

で定義し，残りの角度成分を $\Omega \equiv \{\xi, \theta_\rho, \varphi_\rho, \theta_\lambda, \varphi_\lambda\}$ とし，Ω をハイパー角 (hyperangles) とよぶ．ただし，

$$\xi := \arctan\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \tag{6.37}$$

と定義した．結局，6 つの自由度は，

$$\{x, \xi, \theta_\rho, \varphi_\rho, \theta_\lambda, \varphi_\lambda\} \tag{6.38}$$

である．式 (6.38) の座標系を，超球面座標系 (hyperspherical coordinates) とよぶ．また，特に，$\{\theta_\rho, \varphi_\rho\}$ をまとめて Ω_ρ と，$\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda\}$ をまとめて Ω_λ と書く．例えば，

$$d\Omega_\rho = \rho^2 \sin\theta_\rho d\theta_\rho d\varphi_\rho$$

などである．

■ Schödinger 方程式の立式

これ以降では，自然単位系 $\hbar = c = 1$ を採用する．運動項 T は，式 (6.32) から更に，

$$T = -\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{x}_i} = -\frac{1}{2m_{\rm tot}} \boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{R}_{\rm CM}} - \frac{1}{2M}\left(\boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{\lambda}}\right) \tag{6.39}$$

と変形され，第 1 項の重心運動と第 2 項の内部運動とに分離することができる．従って，内部運動の Schrödinger 方程式は，前述の通り，ポテンシャルがハイパー動径 x にのみ依存しているとして，

$$\left[-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\nabla}^2_{\boldsymbol{\lambda}}\right) + V(x)\right] \Psi(x, \Omega) = E\Psi(x, \Omega) \tag{6.40}$$

と書かれる．ここで，

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\rho}}^2 + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\boldsymbol{\Lambda}^2(\Omega)}{x^2} \tag{6.41}$$

である．ただし，

$$\boldsymbol{\Lambda}^2(\Omega) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\boldsymbol{L}_\rho^2}{\sin^2\xi} - \frac{\boldsymbol{L}_\lambda^2}{\cos^2\xi} + 2(\cot\xi - \tan\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} \ , \tag{6.42}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \equiv -\frac{1}{\sin\theta_{\boldsymbol{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\theta_{\boldsymbol{\alpha}}}\left(\sin\theta_{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\theta_{\boldsymbol{\alpha}}}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta_{\boldsymbol{\alpha}}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}^2} \ , \quad (\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) \ . \tag{6.43}$$

以上から，Schrödinger 方程式 (6.40) は，

$$\left[-\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\boldsymbol{\Lambda}^2(\Omega)}{x^2}\right) + V(x)\right]\Psi(x,\Omega) = E\Psi(x,\Omega) \tag{6.44}$$

となるが，ここで更に，変数分離形 $\Psi(x,\Omega) \equiv x^{5/2}\psi(x)\mathscr{Y}(\Omega)$ を仮定すれば，

$$\begin{cases} \left[-\dfrac{1}{2M}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\boldsymbol{\Lambda}^2(\Omega) - \frac{15}{4}}{x^2}\right) + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \ , & \text{(6.45a)} \\ \boldsymbol{\Lambda}^2(\Omega)\mathscr{Y}(\Omega) = -\gamma(\gamma+4)\mathscr{Y}(\Omega) & \text{(6.45b)} \end{cases}$$

となる．ただし，γ はハイパー軌道角運動量の量子数である．よって，ハイパー動径成分についての Schrödinger 方程式は，

$$\left[-\frac{1}{2M}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\gamma(\gamma+4) + \frac{15}{4}}{x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{6.46}$$

と書かれる．以下，特定のポテンシャル $V(x)$ に対して，この Schrödinger 方程式を解くことを考える．

6.3.3　重いバリオンの質量スペクトルの計算

■　内部運動エネルギーの計算

ポテンシャル $V(x)$ が，

$$V(x) = ax + bx^2 - \frac{c}{x}$$

と書かれる場合を考える．また，一般性を失わずに，$M = 1/2$ とおくことができる．このとき，解くべき Schrödinger 方程式は，式 (6.46) より，

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\gamma(\gamma+4) + \frac{15}{4}}{x^2} + ax + bx^2 - \frac{c}{x}\right]\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \tag{6.47}$$

である．$\gamma(\gamma+4) + \frac{15}{4} = \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)$ であるから，6.2.2 節の議論で，$\ell \to \gamma + \frac{1}{2}$ として，エネルギー固有値 E_n は，

$$E_n \simeq -\frac{c^2}{4(\gamma + n + \frac{5}{2})^2} + 2\sqrt{b}\left(\gamma + \frac{5}{2}\right) + (4n+1)\sqrt{b} \tag{6.48}$$

と求まる．

以下では，ポテンシャル $V(x)$ に含まれるパラメータ a, b, c の決定方法を述べる．

本研究では，まず，非相対論的な枠組みで重いバリオン系の質量スペクトルの計算を行った，K. Thakkar らによる先行研究 [82] に従って，パラメータ c は，

$$c = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.6}{1 + \frac{33-2.5}{12\pi} \cdot 0.6 \cdot \ln \frac{m_1+m_2+m_3}{1\ \mathrm{GeV}}} \equiv \frac{2}{3}\alpha_s \tag{6.49}$$

と採ることにする．また，パラメータ a についても，K. Thakkar ら [82] と同様に，基底状態のエネルギー固有値が，実験で得られている重いバリオンの質量 $M^{(\mathrm{exp})}$ を再現するように選ぶことにする：

$$a = \frac{c^3}{(2\gamma+5)^3(\gamma+3)} + \frac{c}{(2\gamma+5)(\gamma+3)} \left(M^{(\mathrm{exp})} - m_{\mathrm{tot}} \right) . \tag{6.50}$$

最後に，パラメータ b の決め方を述べる．これが，我々の枠組みに独自の部分で，K. Thakkar らの先行研究 [82] とは異なる部分である．我々は，ハミルトニアンの因子化 (6.8) を可能にするための条件 (6.11)：

$$b = \frac{a^2(2\gamma+5)^2}{4c^2} \tag{6.51}$$

から決定することにする．これは，未知の物理的なスペクトルに，可解性の根幹にあるハミルトニアンの因子化による寄与が含まれている，との発想に基づく．

■ 質量スペクトルの計算

重いバリオン系の質量は，各素粒子の質量の総和と内部運動エネルギーを足し合わせることによって，

$$M_n = m_{\mathrm{tot}} + E_n \tag{6.52}$$

で与えられる．

ここでは，1 例として，重いバリオン Σ_{b}^{+} の質量スペクトルを計算する．Σ_{b}^{+} は，アップ・クォーク (u) 2 つとボトム・クォーク (b) 1 つとから成る 3 粒子系である．実際の計算では，座標 x の定義において，1 番目と 2 番目の粒子にアップ・クォーク (u) を，3 番目の粒子にボトム・クォーク (b) をとっている．この意図は，次の小節で明らかになるが，ボトム・クォーク (b) の周りをアップ・クォーク (u) が運動している，という描像を考えていることにある．また，各クォークの質量には，構成子クォークの質量（表 6.1 参照）を用いた．

表 6.1　構成子クォークの質量．

クォーク	質量 m /GeV
アップ (u)	0.338
ボトム (b)	4.67

図 6.2 に重いバリオン Σ_{b}^{+} の質量スペクトルの計算結果を示す．図 6.2 中には，重いバリオン Σ_{b}^{+} の質量の実験値 [76]：

$$M^{(\mathrm{exp})} = 5.8113 \text{ GeV} \ ,$$

も併せてプロットしている．

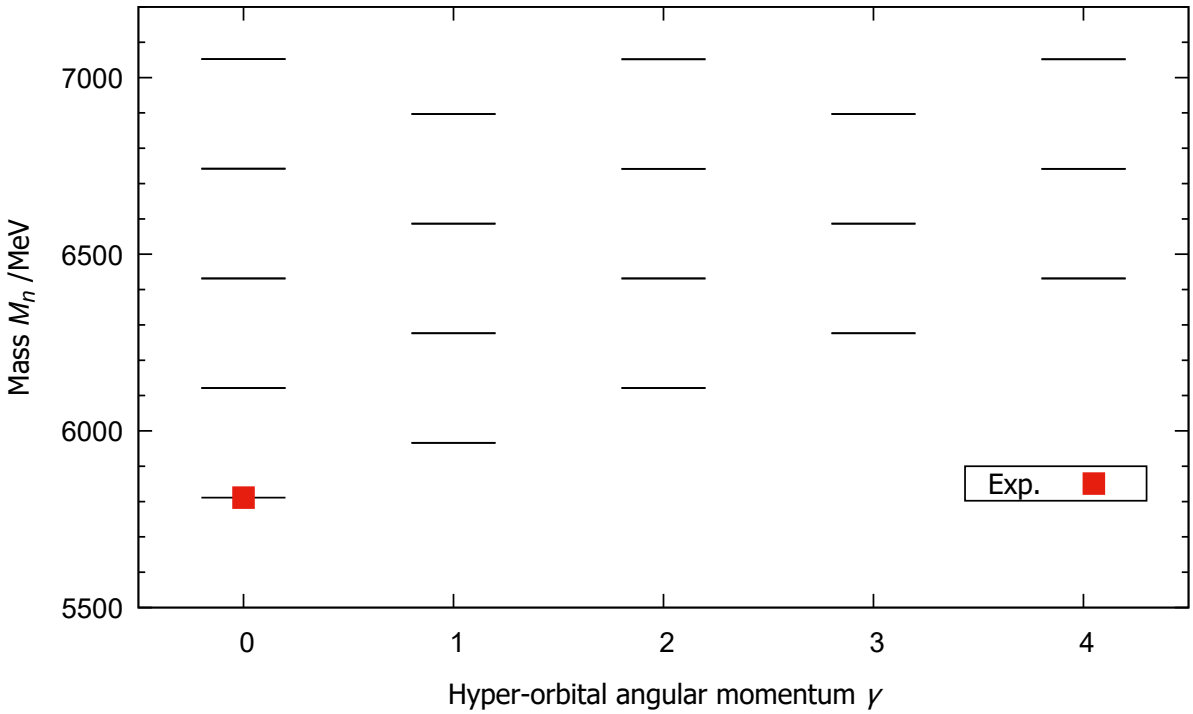


図 6.2　重いバリオン Σ_{b}^{+} の質量スペクトル．

6.3.4　重いバリオン系の確率密度の計算

得られた波動函数 $\Psi(x,\Omega) = x^{-5/2}\psi(x)\mathscr{Y}(\Omega)$ から，(x,ξ)-極座標平面上でのバリオンの存在確率：

$$P(x,\xi) := \int \mathrm{d}\Omega_\rho \int \mathrm{d}\Omega_\lambda \, |\Psi(x,\Omega)|^2 \ , \tag{6.53}$$

が計算される．本論文の主題である解ける量子力学からは少し話が逸れるが，この計算は興味深い結果を与えるので，本小節ではこれについて述べることにする．以下では，質量スペクトルの計算例を示した Σ_{b}^{+} の存在確率を考えてゆく．

新たな変数：

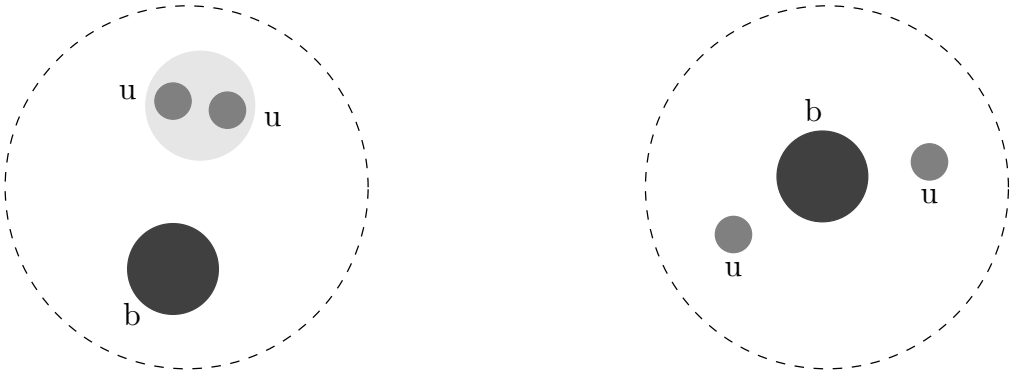
$$r_{\mathrm{uu}} := |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \propto \rho \ , \tag{6.54}$$

$$r_{(\mathrm{uu})\text{-b}} := \left| \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} - \boldsymbol{r}_3 \right| \propto \lambda \ , \tag{6.55}$$

を導入する．r_{uu} はふたつのウップ・クォーク間の距離を，$r_{(\mathrm{uu})\text{-b}}$ はふたつのウップ・クォークからなる系の質量中心（重心）とボトム・クォークとの距離を，それぞれ表している．(x,ξ)-極座標平面上の点は，これらの新たな変数を直交する 2 軸に採った $(r_{\mathrm{uu}}, r_{(\mathrm{uu})\text{-b}})$-平面に，1 対 1 に写すことができる．

図 6.4 には，存在確率 $P(x,\xi)$ をプロットした．ハイパー軌道角運動量の基底状態 $(\gamma = 0)$ の場合，$(r_{\mathrm{uu}}, r_{(\mathrm{uu})\text{-}\mathrm{b}})$-平面上に，ピークがひとつ存在する．ハイパー軌道角運動量の量子数を大きくしていくにつれて，そのピークがふたつに分裂してゆく様を見て取ることができる．このピークの分裂は，ハイパー軌道角運動量を大きくすることで，次のふたつのモードが生じてくることを意味している：

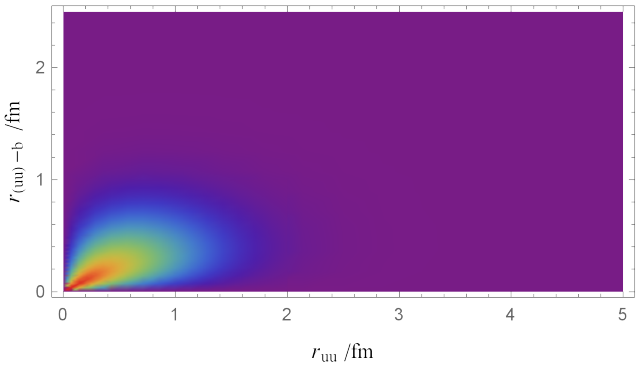
- **左上のピークが表すモード**：$r_{\mathrm{uu}} < r_{(\mathrm{uu})\text{-}\mathrm{b}}$ であることから，ふたつの u クォークがクラスタ (cluster)[註28] を形成し，b クォークの周りを“公転”している，という描像（図 6.3a 参照）．
- **右下のピークが表すモード**：$r_{\mathrm{uu}} > r_{(\mathrm{uu})\text{-}\mathrm{b}}$ であることから，ふたつの u クォークは互いに距離をおきながら，b クォークの周りを“公転”している，という描像（図 6.3b 参照）．



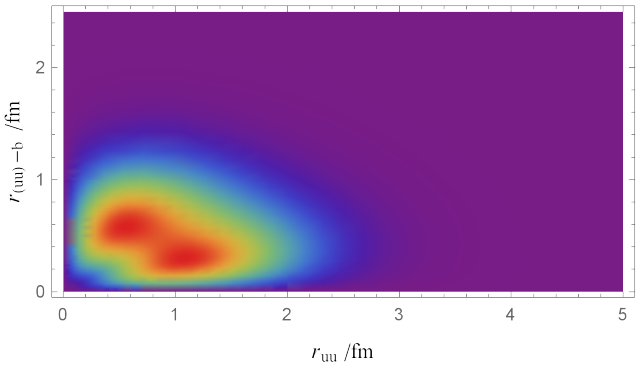
(a) 左上のピークが表すモード $(r_{\mathrm{uu}} < r_{(\mathrm{uu})\text{-}\mathrm{b}})$．　**(b)** 右下のピークが表すモード $(r_{\mathrm{uu}} > r_{(\mathrm{uu})\text{-}\mathrm{b}})$．

図 6.3　ハイパー軌道角運動量の量子数 $\gamma \geqslant 1$ のときに生じるふたつのモード．

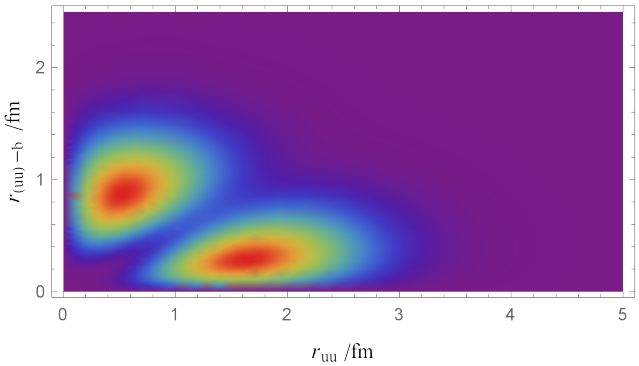
[註28]「クラスター」は，集団感染を意味する専門用語でもある（本論文の内容とは全く無関係である）．本論文を執筆していた 2020 年度は，新型コロナウィルス感染症 (COVID-19) の世界的な大流行の影響で，社会が大きく混乱した 1 年間であった．



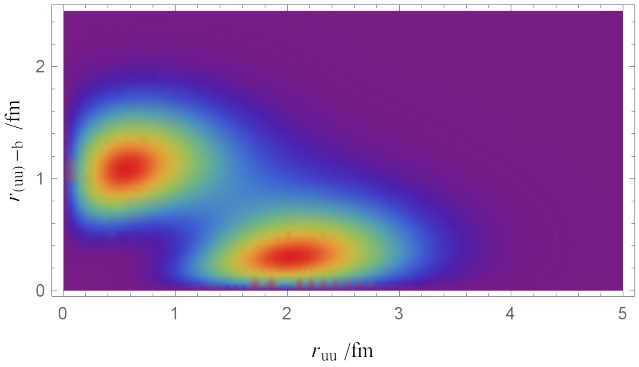
(a) $\gamma = 0$ のとき.



(b) $\gamma = 1$ のとき.



(c) $\gamma = 2$ のとき.



(d) $\gamma = 3$ のとき.

図 6.4　重いバリオン Σ_b^+ の存在確率．赤ほど高確率で，紫に近づくにつれて低確率である．

6.4 S. Beraらの処方の評価と補正

6.2.2 節の末尾で述べたように，式 (6.1) 型のポテンシャル問題に対する S. Bera らの処方には，その近似手法に対する数学的・数理的な議論が不在である．そこで，本節で我々は，対数摂動論（附録 C 参照）の手法を用いて，S. Bera らの処方に対して，その評価式を与える．対数摂動論は，無摂動状態の基底状態の情報だけで摂動計算を行う手法であり，摂動展開の評価式を明示的に記すことができるという意味において，基底状態のみに対して厳密解を得ることのできる式 (6.1) 型のポテンシャル問題とは相性がよい．

その第 1 段階として，本論文では，第 1 励起状態のエネルギー固有値を与える近似式 (6.23), (6.25) に対する評価式を考える．

6.4.1 定式化

対数摂動論を用いるために，ハミルトニアン $\widetilde{\mathcal{H}}^{[1]}$(6.21) を無摂動状態のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ と摂動項 $\lambda V'$ とに分けて，次のように書く：

$$\mathcal{H}^{[1]} \equiv \widetilde{\mathcal{H}}^{[1]} + \lambda V' = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{x^2} + a_1 x + b x^2 - \frac{c}{x} + R + \lambda\alpha x \ . \tag{6.56}$$

ここで，R は，式 (6.17) より，

$$R = \frac{c^2}{4(\ell+1)^2} - 2\sqrt{b}(\ell+1) + \sqrt{b}$$

であり，

$$\lambda\alpha \equiv a - a_1 = \frac{\sqrt{b}c}{(\ell+1)(\ell+2)}$$

とおいた．λ は，摂動の次数を明示的に記すためのパラメータで，最終的に $\lambda \to 1$ とする．

我々の定式化では，S. Bera らの処方 (6.25) は，無摂動状態，即ち摂動計算でのエネルギーの 0 次を求めたことに対応する．そこで，本小節では，式 (6.25) における $E_0 + \widetilde{\mathcal{E}}_1$ を $E_1^{(0)}$ と書くことにする：

$$E_1^{(0)} \equiv -\frac{c^2}{4(\ell+2)^2} + 2\sqrt{b}(\ell+2) + 3\sqrt{B} \ . \tag{6.57}$$

また，記号 E_1 はハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ の厳密な第 1 励起状態のエネルギー固有値を表すと約束する．無摂動状態の基底状態波動函数は，

$$\psi_0^{(0)}(x) = \mathcal{N} x^{\ell+2} \exp\left[-\frac{\sqrt{b}}{2}x^2 - \frac{c}{2(\ell+2)}x\right] \tag{6.58}$$

であり，規格化定数 $\mathcal{N}$ は，

$$\mathcal{N} = \left\{\frac{1}{2}b^{-\frac{\ell}{2}-\frac{3}{2}}\left[\sqrt[4]{b}\ \Gamma\left(\ell+\frac{5}{2}\right){}_1F_1\left(\ell+\frac{5}{2},\frac{1}{2};\frac{c^2}{4\sqrt{b}(\ell+2)^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{c}{\ell+2}\ \Gamma(\ell+3){}_1F_1\left(\ell+3,\frac{3}{2};\frac{c^2}{4\sqrt{b}(\ell+2)^2}\right)\right]\right\}^{-1/2} \tag{6.59}$$

と計算される．

ここで，対数摂動論の公式 (C.11) を用いれば，エネルギーに対する摂動の 1 次補正は，

$$E_1^{(1)} = \frac{\alpha\left[\sqrt[4]{b}\Gamma(\ell+3){}_1F_1\left(\ell+3,\frac{1}{2};\frac{c^2}{4\sqrt{b}(\ell+2)^2}\right)+\frac{c}{\ell+2}\Gamma\left(\ell+\frac{7}{2}\right){}_1F_1\left(\ell+\frac{7}{2},\frac{3}{2};\frac{c^2}{4\sqrt{b}(\ell+2)^2}\right)\right]}{\sqrt[4]{b}\left[\sqrt[4]{b}\Gamma\left(\ell+\frac{5}{2}\right){}_1F_1\left(\ell+\frac{5}{2},\frac{1}{2};\frac{c^2}{4\sqrt{b}(\ell+2)^2}\right)+\frac{c}{\ell+2}\Gamma(\ell+3){}_1F_1\left(\ell+3,\frac{3}{2};\frac{c^2}{4\sqrt{b}(\ell+2)^2}\right)\right]} \tag{6.60}$$

と求まる．よって，摂動の 1 次までで，エネルギーは，

$$E_1 \cong E_1^{(0)} + E_1^{(1)} \tag{6.61}$$

で与えられる．

摂動の 2 次以降についても，対数摂動論の公式 (C.14), (C.16) を用いて計算することができる．しかし，摂動の 2 次以降について我々が得られるのは，形式的な表式のみである．

6.4.2 具体例

ここでは，パラメータに具体的な値を代入して，S. Bera らの処方及びそれに対する我々の補正によって計算されるエネルギー固有値を求める．尚，我々は，以下で調べる全ての場合に対して，$E_1^{(2)}$ 以降の寄与は，10^{-3} 程度以下と充分小さいことを，数値的に確かめている．

■ S. Bera らの処方との比較

本小節では，まず初めに，S. Bera らの論文 [71] で採用されているパラメータを用いて，具体的な計算を行う．パラメータを $\ell = 1, b = 0.5, c = 0.01$ と選んだものを I，$\ell = 1, b = 3, c = 1$ と選んだものを II と番号付けをし，計算結果を表 6.2 に示す．尚，E_1 に対する数値的な解 $E_1^{(\mathrm{num})}$ を併記した．

表 6.2　S. Bera らの処方とそれに対する我々の補正よって計算されるエネルギー固有値（その 1）．

パラメータ	$E_1^{(\mathrm{num})}$	$E_1^{(0)}$	$E_1^{(0)} + E_1^{(1)}$
I	6.36649	6.36396	6.36816
II	15.9421	15.5607	15.6413

■ $\ell = 0, c = 1$ と固定し，b を自由なパラメータとした場合

6.3 節で行った議論から分かるように，実際の物理現象を考える際，3 つのパラメータ $\{\ell, b, c\}$ のうち，ℓ は軌道角運動量，c は結合定数として要請される値をとり，模型に含まれる自由なパラメータは b のみとなることが考えられる．そこで，本項の例では，b は自由なパラメータとし，$\ell = 0, c = 1$ と採った場合を考える．

無摂動状態，即ち S. Bera らの処方で求まるエネルギーの値 $E_1^{(0)}$ は b の函数として，

$$E_1^{(0)}(b) = -\frac{1}{16} + 7\sqrt{b}\ , \tag{6.62}$$

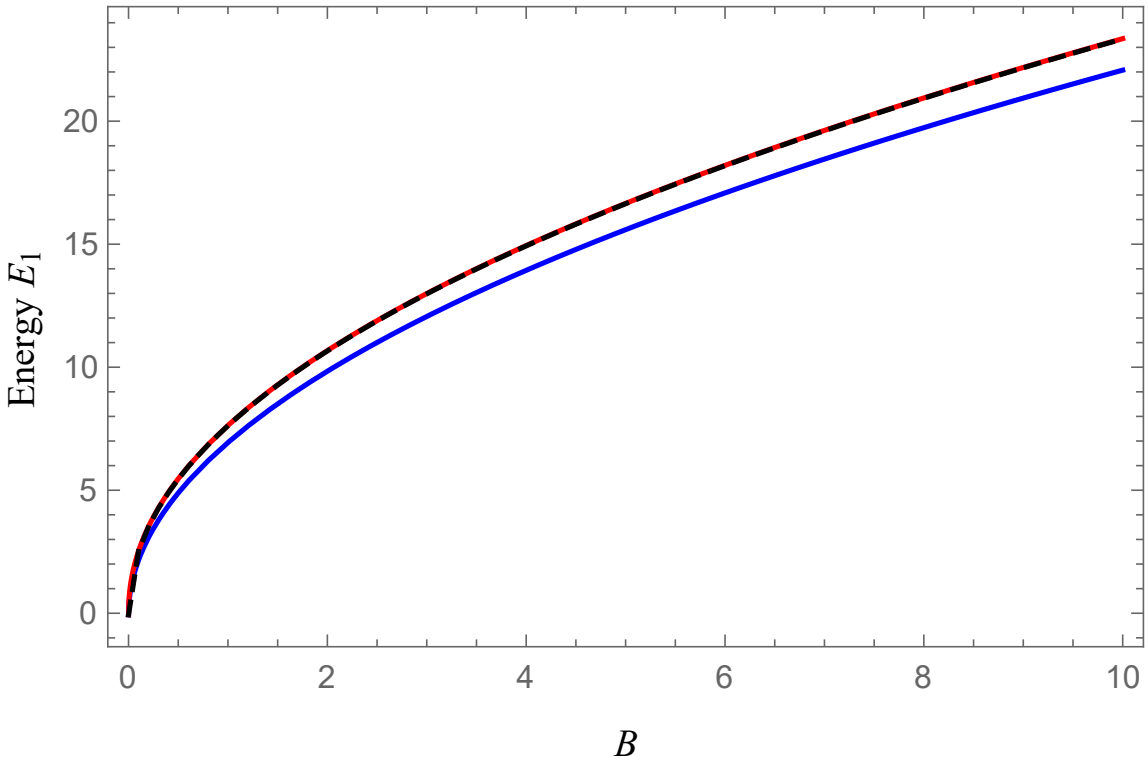


図 6.5　S. Bera らの処方とそれに対する我々の補正よって計算されるエネルギー固有値（その 2）．$\ell = 0, c = 1$ と固定し，b を模型に含まれる自由なパラメータとした．青い実線は $E_1^{(0)}(b)$ を，赤い実線は $E_1^{(0)}(b) + E_1^{(1)}(b)$ をそれぞれ表している．また，黒い破線は，$E_1(b)$ に対する数値的な解である．

また，摂動の 1 次の補正項 $E_1^{(1)}$ も b の函数として，

$$E_1^{(1)}(b) = \frac{\sqrt{b}\,{}_1F_1\left(3, \frac{1}{2}; \frac{1}{16\sqrt{b}}\right) - \frac{\sqrt[4]{b}}{2}\frac{15\sqrt{\pi}}{8}\,{}_1F_1\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{16\sqrt{b}}\right)}{\sqrt[4]{b}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\,{}_1F_1\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{16\sqrt{b}}\right) - {}_1F_1\left(3, \frac{3}{2}; \frac{1}{16\sqrt{b}}\right)} \tag{6.63}$$

と計算される．$E_1^{(0)}$ と $E_1^{(0)} + E_1^{(1)}$ とをプロットすると，図 6.5 を得る．

6.5　式 (6.1) 型のポテンシャル問題の数理構造

6.2.2, 6.4 節では，式 (6.1) 型のポテンシャル問題に対する近似解法の解説を行った．ところで，本研究の目標は，可解性の統一的な描像を見出すことであり，B. の研究は，可解性の周縁に存在する問題の構造を知ることで，可解性に迫ることが目的であった．従って，我々は，式 (6.1) 型のポテンシャル問題を解くことだけでなく，その問題の構造に興味がある．

そこで，本節では，3.3 節で紹介した形状不変系に対する代数を，応用・拡張し，懸案の系に適用することを考える．既に説明した通り，式 (6.1) の形のポテンシャルは，動径振動子と Coulomb ポテンシャルの系を，スーパーポテンシャルの意味で重ね合わせることによって得られる系であると解釈できる．動径振動子の系と Coulomb ポテンシャルの系のそれぞれに代数構造が備わっていることから，それらを重ね合わせてできた系に対しても，なんらかの代数的構造が備わっていることが期待される．

6.5.1　代数の定義

3.3.3 節に従い，代数の生成子を

$$\begin{cases} J_+ := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\sqrt{b}x - \dfrac{J_3}{x} + \dfrac{(1-\varepsilon)c}{2J_3}\right) & \text{(6.64a)} \\ J_- := \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\sqrt{b}x - \dfrac{J_3}{x} + \dfrac{(1-\varepsilon)c}{2J_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & \text{(6.64b)} \\ J_3 := -\mathrm{i}\partial_\varphi\ , & \text{(6.64c)} \\ J_4 := \varepsilon(1-\varepsilon)x & \text{(6.64d)} \end{cases}$$

で定義する．ただし，J_4 は，代数が閉じるように導入された第 4 の生成子であるが，その実体は現在のところよく分かっていない．これらの生成子の間には，以下のような交換関係が成り立つことが計算される：

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= -4\varepsilon\sqrt{b} - \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4(J_3+1)^2} + \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4{J_3}^2} + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)\sqrt{b}c}{J_3+1}J_4 - \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)\sqrt{b}c}{J_3}J_4 \\ &\equiv F(J_3, J_4)\ , \qquad \text{(6.65a)} \\ [J_3, J_\pm] &= \pm J_\pm\ , \quad [J_4, J_\pm] = \mp\varepsilon(1-\varepsilon)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\ , \quad [J_3, J_4] = 0\ . \qquad \text{(6.65b)} \end{aligned}$$

6.5.2　エネルギースペクトルの計算

本小節では，前小節で導入した代数を用いて，この系のエネルギースペクトルを計算してゆく．その手法は，3.3.3 節で説明した手法を応用したものとなっている．ここで，J_3 の固有値は $-(\ell+n+1)$ であるとする．他方，J_4 について，我々は， 系のエネルギースペクトルを評価する上での第ゼロ近似として，その“真空期待値”：

$$\int_0^\infty \psi_0^{(*)}(x) J_4 \psi_0(x)\ \mathrm{d}x \equiv \langle 0|\, J_4\, |0\rangle\ , \quad \psi_0(x) = \mathcal{N} x^{\ell+1}\exp\left[-\frac{\varepsilon\sqrt{b}}{2}x^2 - \frac{(1-\varepsilon)c}{2(\ell+1)}x\right]\ , \quad (6.66)$$

で見積もることにする．

式 (3.134) からの類推で，エネルギーは，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &\simeq -\sum_{i=0}^{n-1} F(-\ell-i-2, \langle 0|\, J_4\, |0\rangle) \\ &= 4n\varepsilon\sqrt{b} + \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4(\ell+1)^2} - \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4(\ell+n+1)^2} \\ &\quad + \frac{n\varepsilon(1-\varepsilon)\sqrt{b}c}{(\ell+1)(\ell+n+1)} \frac{\Gamma(\ell+2)\,{}_1F_1\left(\ell+2, \frac{1}{2}, \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4\varepsilon\sqrt{b}(\ell+1)^2}\right) - (1-\varepsilon)c\Gamma\left(\ell+\frac{5}{2}\right){}_1F_1\left(\ell+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4\varepsilon\sqrt{b}(\ell+1)^2}\right)}{\varepsilon\sqrt{b}(\ell+1)\Gamma\left(\ell+\frac{3}{2}\right){}_1F_1\left(\ell+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4\varepsilon\sqrt{b}(\ell+1)^2}\right) - \sqrt{\varepsilon}\sqrt[4]{b}(1-\varepsilon)c\Gamma(\ell+1)\,{}_1F_1\left(\ell+2, \frac{3}{2}, \frac{(1-\varepsilon)^2c^2}{4\varepsilon\sqrt{b}(\ell+1)^2}\right)} \end{aligned} \quad (6.67)$$

と求めることができる．

6.5.3 議論

■ 式 (6.67) の評価

式 (6.67) は，式 (6.1) 型のポテンシャルのエネルギースペクトルを，その代数的構造 (6.65) に基づいて与える近似式である．本項では，まず，この式の近似の精度に対する評価を行う．ここでいう「近似の精度」とは，式 (6.67) の $\mathcal{E}_n$ と数値的なエネルギースペクトルの計算結果 $\mathcal{E}_n^{(\mathrm{num})}$ との差：

$$\left|\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_n^{(\mathrm{num})}\right| \tag{6.68}$$

のことである．

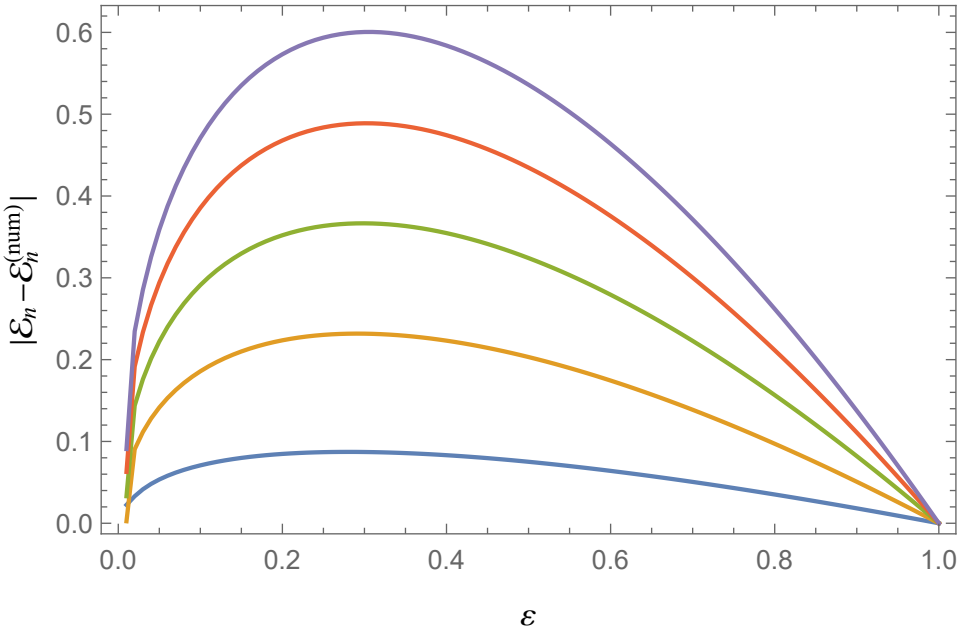
この近似の精度は，当然のことながら，式 (6.5) に含まれるパラメータに依存する．ここでは，簡単のため，$b = c = 1$ として，ある ℓ に対して，ε を $0 < \varepsilon < 1$ の間で変化させた場合についてみてゆくことにする．式 (6.68) の計算結果を図 6.6, 6.7 に示す．尚，$\varepsilon = 1$ でこの系は動径振動子の系に一致し，$\varepsilon = 0$ で Coulomb ポテンシャルの系に一致する．

この計算結果から，近似の精度は，いずれも 10^{-1} 程度以下であり，ℓ 大きくすると精度はより高くなる，といえる．式 (6.67) の近似がよい近似であることは，式 (6.1) 型のポテンシャル問題には式 (6.65) の代数的構造が備わっているという我々の定式化が，妥当であることを示唆している，と考えられる．次項では，この考えに基づいて，式 (6.1) 型の系に対する，現段階での我々の理解を述べる．

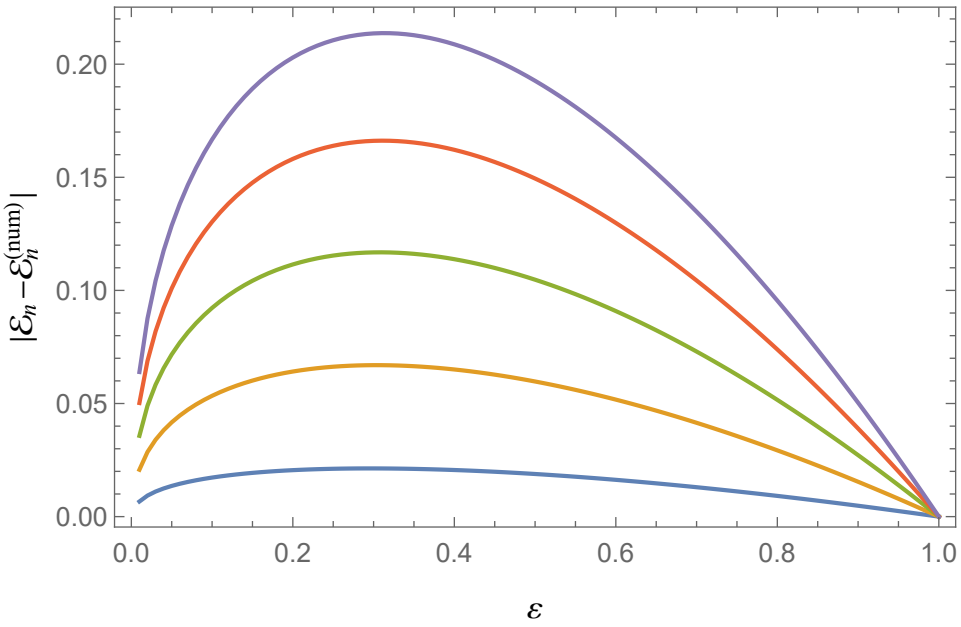
■ 式 (6.1) 型の系は可解系の周縁に存在する系のひとつである

式 (6.1) の形のポテンシャルは，動径振動子の系と Coulomb ポテンシャルの系の重ね合わせとして理解でき，我々の記法では，それらを $\varepsilon : 1 - \varepsilon$ の比で重ね合わせた系，ということになるのであった．本小節では，この式 (6.1) 型のポテンシャル問題のもつ構造について，代数的な取り扱いをすることで解析を行った．その代数的な取り扱いは，形状不変系がもつ代数を拡張し，パラメータ ε を通して，動径振動子の系と Coulomb ポテンシャルの系との中間に存在するような系の取り扱いを可能にする．

動径振動子の系と Coulomb ポテンシャルの系とを重ね合わせてできる系は，本来，可解系ではなく，そのエネルギースペクトルを明示的に求めることはできない．しかしながら，この系に備わっている代数的構造を利用することで，ある程度の精度でエネルギースペクトルを求めることができる．更に，この系の代数的構造には，古典的な形状不変系の代数構造には含まれない，第 4 の生成子 J_4 が存在する．この生成子の具体的な解釈はまだないものの，この生成子の存在によって可解性が失われている，と考えることができる．1 章で述べた「可解系の周縁に存在する」ということの意味は，式 (6.1) 型の系の場合，J_4 なる生成子を導入するという代数の拡張・変形であるといえる．

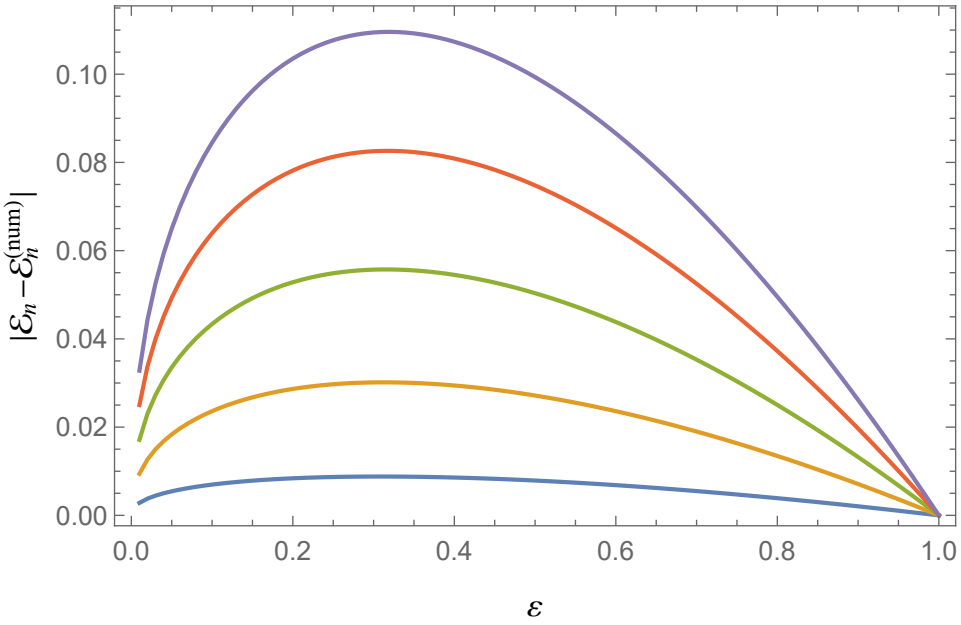


(a) $\ell = 0$ のとき.

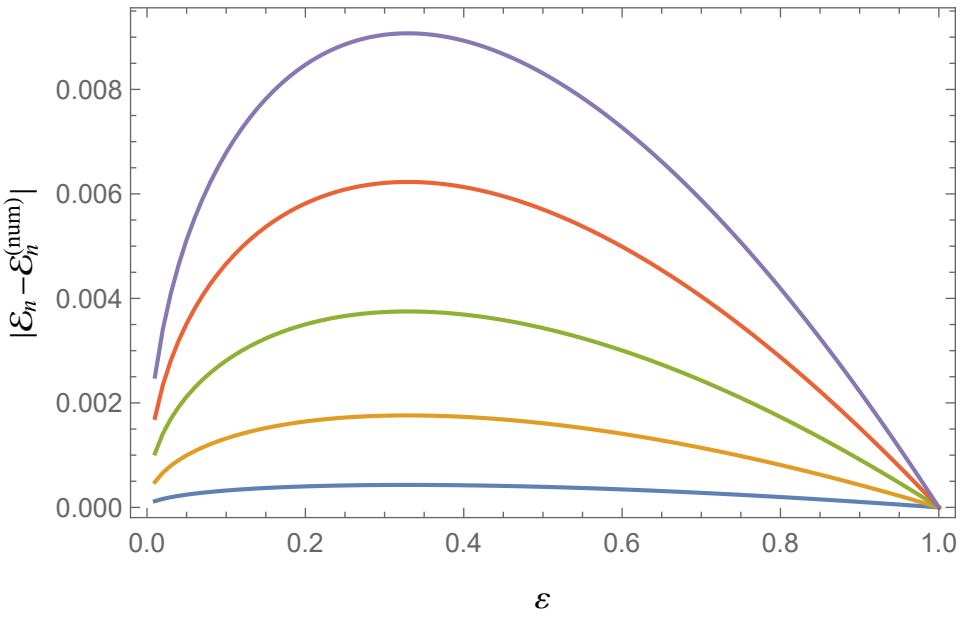


(b) $\ell = 1$ のとき.

図 6.6　様々な ℓ に対する，式 (6.67) の近似の精度評価（その 1）．ただし，$n = 1$（青），$n = 2$（黄），$n = 3$（緑），$n = 4$（赤），$n = 5$（紫）の場合をプロットした．



(a) $\ell = 2$ のとき.



(b) $\ell = 10$ のとき.

図 6.7　様々な ℓ に対する，式 (6.67) の近似の精度評価（その 2）．ただし，$n = 1$（青），$n = 2$（黄），$n = 3$（緑），$n = 4$（赤），$n = 5$（紫）の場合をプロットした．

6.6　本章の結論

本章では，可解性の理解を深めるために，その周縁に存在する擬似可解系に焦点を当てた．

まず，式 (6.1) 型のポテンシャル問題を導入し，この系が古典的な形状不変系同士の重ね合わせと理解できることを示した（6.1 節）．この系は，通常の解ける量子力学の手法では解かれないことを示し（6.2.1 節）た後に，先行研究 [71] にある，形状不変性の概念を拡張したような近似解法の解説を行った．続いて，重いバリオンの内部構造に対して，式 (6.1) の形のポテンシャルが適用できると考え，実際にその解法を用いて系の質量スペクトルの計算を行うことで，このポテンシャルが実際の物理現象を記述し得ることを確認した（6.3 節）．

しかしながら，先行研究の解法には，精度評価や数理的な議論が不在である，というところに問題が残っていた．我々は対数摂動論を用いて定量的にその近似の精度を評価し，（部分的に）改良することができた（6.2 節）．

本章の最後では，問題の解法ではなく，式 (6.1) 型の系そのものに備わる数理構造への理解を深めることを試みた（6.5 節）．具体的には，この系が古典的な形状不変系同士の重ね合わせと理解できることを手がかりに，形状不変系のもつ代数構造を拡張し，この代数的な構造を用いて，この問題に対するエネルギースペクトルを求める方法を提示した．これらのことは，この系が可解系の周縁に存在するということを代数的な意味において示した，ということができる．

以上のように，我々は，可解性の周縁に存在する擬似可解系として，古典的な形状不変系同士の重ね合わせから構成される系があることを見出し，その代数的構造を特定した．可解系である古典的な形状不変系とこの擬似可解系とでは，代数の生成子に違いがある，といえ，部分的に，可解／非可解の境界を理解した．

第7章

結論

筆者は，1次元の量子力学系の問題に対するSchrödinger方程式の可解性について，その本質的で統一的な描像を得ることや可解性の起源を理解することを目標として，研究を行なっている．とりわけ，本論文では，『量子力学における可解性とその周縁に関する数理の研究』と題し，様々な可解系を新たな視点で捉え直すことと，可解性の周縁に存在する問題に可解系の手法を用いてアプローチすることとを行なった．

量子力学の可解性における重要な概念として，形状不変性とよばれる一種の対称性があり，これをもつ系は必ず可解である．また，形状不変性をもつ系を変形することで，様々な可解系を構成する方法が提唱されてきた．これらのことから，我々は，この形状不変性を機軸に解析を行った．具体的には，次のふたつの解析を行った：

A. 既知の可解系を新たな視点で捉え直し，可解性の指標を探索した．

B. 可解系の手法を用いて，その周縁に存在する擬似可解な問題を解法を提唱し，数理構造を議論した．

我々はまず，A., B. の解析に先立って，これまでに知られている様々な可解系に対して，$\hbar$依存性を正しく考慮した定式化を行った．これは，SWKB条件の解析を行うために必要なことである．$\hbar$の取り扱い方に関する誤謬が広がっており，また$\hbar$依存性を正しく考慮した定式化が纏められた文献がないことから，これ自体も有意義なことだといえる．

A., B. の解析に対する個別の具体的な結論は，5, 6章の終わりに，既に示してある．そこで，ここでは，その包括的な結論と本研究の展望とを述べることとする．

我々の研究では，可解性の指標として，SWKB条件を採用している．本論文で我々は，種々の可解系に対してその解析をし，その意味するところが部分的に明らかになった．しかしながら，現段階ではSWKB条件自体を理解するための様々な“状況証拠”が集まっているだけで，それが充分に理解されたとはいえない．我々にとって，SWKB条件の完全な理解とは，表5.3中の $\boxed{\ ?\ }$ にあてはまるピースを見つけ出すことである．そのためには，本論文で扱わなかった可解系に対してもSWKB条件の解析を行ったり，条件付き可解系以外の系に対しても5.4.3節のような解析をしたりすることが有効であろう．

また，我々は，動径振動子の系とCoulombポテンシャルの系との重ね合わせから擬似可解系を構築した．しかし，この議論は，今後，精緻化・一般化してゆくことが必要である．例えば，生成子J_4について，数学的な見地から理解することで，「可解系の周縁」の意味を数学的に記述することができるようになるであろう．また，古典的な形状不変系の重ね合わせから擬似可解系を構築する一般論を展開することは，可解系の周縁に存在する系のクラスをひとつ確立することになろう．

以上のふたつの内容は，互いに独立なものではなく，相補的なものである．このような擬似可解系に対してSWKB条件を調べることは，可解系に対してSWKB条件が示す性質と比較することで，SWKB条件の理解を深めることになろう．また，擬似可解系が存在する「可解系の周縁」の意味を，SWKB条件を用いて記述することが可能となるかもしれない．両者を互いに関連付けた議論を通して可解性の探求をすることは，本研究における今後の課題のひとつである．

謝 辞

本論文を纏めるに当たり，先行配属時から 3 年間半，研究の御指導をいただいた指導教員で主査の澤渡信之先生には，心から感謝しております．また，学部 1 年次から澤渡先生の自主ゼミに参加していたことも，私に多くの刺激や示唆を与えてくれました．ありがとうございました．本学科教授である齋藤晃一先生と福元好志先生には，副査として，本論文を査読し貴重なご意見をくださったことに感謝いたします．興味深い講義と，主に本論文 5 章の研究に対する様々なアドヴァイスとを与えてくださった佐々木隆博士にも，深く御礼申し上げます．更に，先輩の甘利さんと箭内さん，伊藤君をはじめとする同期や後輩たちのお陰で，楽しくもありかつ有意義な時間を送ることができました．彼らと議論し合ったことは，私の大切な財産です．最後に，主に経済的な，また生活面における支援をして下さった両親，精神的な支えとなってくれた友人たちに感謝を述べたいと思います．

附録 A

記号，定義，公式など

A.1　ロンスキアン（Wronski 行列式）

定義

$$\mathrm{W}\left[f_1,\ldots,f_m\right](x) \coloneqq \det\left(\frac{\mathrm{d}^{j-1}f_k(x)}{\mathrm{d}x^{j-1}}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant m} \tag{A.1}$$

諸公式

$$\mathrm{W}\left[gf_1,gf_2,\ldots,gf_n\right](x) = g(x)^n\mathrm{W}\left[f_1,f_2,\ldots,f_n\right](x) \tag{A.2}$$

$$\mathrm{W}\left[f_1(y),f_2(y),\ldots,f_n(y)\right](x) = y'(x)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{W}\left[f_1,f_2,\ldots,f_n\right](y) \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{W}\big[\mathrm{W}\left[f_1,f_2,\ldots,f_n,g\right],\mathrm{W}\left[f_1,f_2,\ldots,f_n,h\right]\big](x)&\\ = \mathrm{W}\left[f_1,f_2,\ldots,f_n\right](x)\mathrm{W}\left[f_1,f_2,\ldots,f_n,g,h\right](x)&\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2　超幾何・合流型超幾何函数

A.2.1　超幾何函数

■　定義

$${}_pF_q\left(\begin{array}{c}\alpha_1,\cdots,\alpha_p\\ \beta_1,\cdots,\beta_q\end{array}\middle|\, z\right) \equiv {}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\beta_1,\ldots,\beta_s;z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{A.5}$$

を（一般化された）超幾何函数という．ここで，$(a)_n$ は，Pochhammer の記号とよばれ，

$$(a)_n \coloneqq \begin{cases}1 & (\text{for } n=0)\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a+k-1) = a(a+1)\cdots(a+n-1) & (\text{for } n\geqslant 1)\end{cases} \tag{A.6}$$

である．

特に，$p=2,q=1$ の場合：

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\beta\\ \gamma\end{array}\middle|\, z\right) \equiv {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) \equiv {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{A.7}$$

は，Gauss の超幾何函数とよばれ，$p = q = 1$ の場合：

$$ {}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \gamma & z \end{array} \right) \equiv {}_1F_1(\alpha;\gamma;z) \equiv {}_2F_1(\alpha,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{A.8} $$

は，合流型超幾何函数（kummer の函数）とよばれている．

A.2.2 合流型超幾何函数

■ 定義

合流型超幾何函数（Kummer の函数）：

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{A.9} $$

は，合流型超幾何微分方程式：

$$ z\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} + (\gamma - z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} - \alpha u = 0 \tag{A.10} $$

を満たす．

■ 漸近展開

$|z| \to \infty$ のとき，${}_1F_1(\alpha,\gamma;z)$ の漸近展開の主要項は，

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;z) \sim \left(\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^z z^{\alpha-\gamma} \right) \left(1 + \mathcal{O}(z^{-1})\right) \tag{A.11} $$

となる．

A.3 （古典）直交多項式

（重み函数が正定値であるような）2 階の微分方程式を満たす古典直交多項式は，Hermite 多項式，Laguerre 多項式，Jacobi 多項式の 3 種類である．

A.3.1 Hermite 多項式

■ 微分方程式

$$ y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \tag{A.12} $$

■ **Rodrigues の公式**

$$ H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \tag{A.13} $$

■ 漸化式

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{A.14}$$
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{A.15}$$

■ 直交性と規格化

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_m(x)H_n(x)\ \mathrm{d}x = 2^n\pi^{1/2}n!\delta_{m,n} \tag{A.16}$$

A.3.2 Laguerre 多項式

■ 微分方程式

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0 \tag{A.17}$$

■ **Rodrigues** の公式

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\mathrm{e}^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha}) \tag{A.18}$$

■ 漸化式

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)} + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)} \tag{A.19}$$

■ 直交性と規格化

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{(n+\alpha)!}{n!}\delta_{m,n} \tag{A.20}$$

A.3.3 Jacobi 多項式

■ 微分方程式

$$(1-x^2)y''(x) - [\beta - \alpha(\alpha+\beta+2)x]y'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0 \tag{A.21}$$

■ **Rodrigues の公式**

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] \tag{A.22}$$

■ 漸化式

$$\begin{aligned}2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ = (2n+\alpha+\beta+1)\left[(2n+\alpha+\beta+2)(2+\alpha+\beta)x+\alpha^2-\beta^2\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\ -2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\end{aligned} \tag{A.23}$$

■ 直交性と規格化

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{(n+\alpha)!(n+\beta)!}{(n+\alpha+\beta)!n!}\delta_{m,n} \tag{A.24}$$

A.4 積分公式

A.4.1 文献 [26] の積分公式

- $0<a<b$ に対して，

$$\int_a^b \sqrt{(y-a)(b-y)}\,\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\pi}{2}(a+b)-\pi\sqrt{ab} \tag{A.25}$$

- $a<b$ に対して，

$$\int_a^b \sqrt{(y-a)(b-y)}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}-ab+1}-\pi \tag{A.26}$$

- $-1<a<b<1$ に対して，

$$\int_a^b \sqrt{(y-a)(b-y)}\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \frac{\pi}{2}\left[2-\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{(1+a)(1+b)}\right] \tag{A.27}$$

- $1<a<b$ に対して，

$$\int_a^b \sqrt{(y-a)(b-y)}\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} = \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{(a+1)(b+1)}-\sqrt{(a-1)(b-1)}-2\right] \tag{A.28}$$

A.4.2 文献 [83] の積分公式

$$\int \frac{\cos^2 x}{a\cos^2 + c\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4(a-c)^2}\left[(a-c)x + -\frac{c(a-c)}{\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{c\tan x + b}{\sqrt{ac-b^2}}\right] \quad \text{for } 0 < ac \tag{A.29}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x(x+p)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\left[\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x+p}\,\mathrm{d}x\right] \tag{A.30}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a+bx+cx^2} + a\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{b}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \tag{A.31}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x+p}\,\mathrm{d}x = c\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,\mathrm{d}x + (b-cp)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + (a-bp+cp^2)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+p)\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad \text{for } x+p > 0 \tag{A.32}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arctan\frac{2a+bx}{2\sqrt{-a}\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad \text{for } a < 0 \tag{A.33}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \quad \text{for } c < 0 \text{ and } b^2-4ac > 0 \tag{A.34}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+p)\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\arcsin\frac{-2(a+bx+cx^2)+b+2p}{\sqrt{b^2-4ac}} \quad \text{for } \frac{1}{x+p} > 0 \text{ and } b^2-4ac > 0 \tag{A.35}$$

A.4.3 その他の積分公式

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(p+qx)(x+a+1)(x+a-1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{1-2a}}{2(p+q-aq)}\arctan\frac{a^2+ax-x}{\sqrt{1-2a}\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{\sqrt{1+2a}}{2(p-q-aq)}\arctan\frac{a^2+ax+x}{\sqrt{1+2a}\sqrt{a^2-x^2}} \\ &\quad + \frac{\sqrt{p^2-a^2q^2}}{(p+q-aq)(p-q-aq)}\arctan\frac{a^2q+px}{\sqrt{p^2-a^2q^2}\sqrt{a^2-x^2}}\end{aligned} \tag{A.36}$$

附録B

古典的な形状不変系に対してSWKB条件が厳密に成立することの証明

B.1 古典的な形状不変系に対してSWKB条件が厳密に成立することの証明

■ $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ポテンシャル

$\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$\cos x \equiv y \ , \quad dx = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\rm L} \to a_{\rm R} \\ \hline y & p \to q \end{array}$$

を行っている．また，p, q は，

$$p+q=0 \ , \quad pq = \frac{g^2}{(n+g)^2} - 1$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.27) を用いた．

$$\begin{aligned} I &= \int_{a_{\rm L}}^{a_{\rm R}} \sqrt{\hbar^2 n(n+2g) - \frac{\hbar^2 g^2}{\sin^2 x} + \hbar^2 g^2}\ {\rm d}x \\ &= \hbar \int_p^q \sqrt{(n+g)^2 - \frac{g^2}{1-y^2}} \left(-\frac{{\rm d}y}{\sqrt{1-y^2}} \right) \\ &\equiv \hbar(n+g) \int_q^p \sqrt{(y-q)(p-y)}\ \frac{{\rm d}y}{1-y^2} \\ &= \hbar(n+g) \cdot \frac{\pi}{2} \left[2 - \frac{g}{n+g} - \frac{g}{n+g} \right] \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

■ **Coulomb ポテンシャル**

Coulomb ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，$a_{\rm L}$, $a_{\rm R}$ は，

$$a_{\rm L} + a_{\rm R} = \frac{4\hbar^2(g+n)^2}{e^2} \ , \quad a_{\rm L} a_{\rm R} = \frac{4\hbar^4 g^2 (g+n)^2}{e^4}$$

を満たし，2 行目から 3 行目への変換には，式 (A.25) を用いた．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\frac{e^4}{4\hbar^2 g^2} - \frac{e^4}{4\hbar^2(g+n)^2} - \frac{\hbar^2 g^2}{x^2} + \frac{e^2}{x} - \frac{e^4}{4\hbar^2 g^2}}\ \mathrm{d}x \\
&\equiv \frac{e^2}{2\hbar(g+n)} \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{(x-a_{\mathrm{L}})(a_{\mathrm{R}}-x)}\ \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \frac{e^2}{2\hbar(g+n)} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \frac{4\hbar^2(g+n)^2}{e^2} - \pi \frac{2\hbar^2 g(g+n)}{e^2} \right] \\
&= n\pi\hbar
\end{aligned}
$$

■

■ 超球面空間における Kepler 問題

超球面空間における Kepler 問題の場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$
\cot x \equiv y\ , \quad dx = -\frac{dy}{1+y^2}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}} \to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ , \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + y^2
$$

を行っている．また，p, q は，

$$
p + q = \frac{2\mu}{g^2}\ , \quad pq = \frac{\mu^2}{g^2(g+n)^2} - \frac{n(2g+n)}{g^2}
$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.26) を用いた．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2} - \hbar^2 g^2 + \hbar^2(g+n)^2 - \frac{\hbar^2 g^2}{\sin^2 x} + 2\hbar^2\mu\cot x - \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} + \hbar^2 g^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_q^p \sqrt{-\frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2} + \hbar^2(g+n)^2 - \hbar^2 g^2(1+y^2) + 2\hbar^2\mu y} \left(-\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} \right) \\
&\equiv \hbar g \int_\beta^\alpha \sqrt{(y-q)(p-y)}\ \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} \\
&= \hbar g \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu^2 + (g+n)^4}{g^2(g+n)^2} - \frac{\mu^2}{g^2(g+n)^2} + \frac{n(2g+n)}{g^2} + 1} - \pi \right] \\
&= n\pi\hbar
\end{aligned}
$$

■

■ Morse ポテンシャル

Morse ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$
\mathrm{e}^x \equiv y\ , \quad dx = \frac{dy}{y}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}} \to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p \to q \end{array}
$$

を行っている．また，p, q は，

$$
p + q = \frac{2h}{\mu}\ , \quad pq = \frac{(h-n)^2}{\mu^2}
$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.25) を用いた．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{a_\mathrm{L}}^{a_\mathrm{R}} \sqrt{2\hbar^2 nh - \hbar^2 n^2 - \hbar^2\mu^2 \mathrm{e}^{2x} + 2\hbar^2\mu h \mathrm{e}^{x} - \hbar^2 h^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \hbar\mu \int_p^q \sqrt{\frac{2nh}{\mu^2} - \frac{n^2}{\mu^2} - y^2 + \frac{2h}{\mu}y - \frac{h^2}{\mu^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\equiv \hbar\mu \int_p^q \sqrt{(y-p)(q-y)}\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&= \hbar\mu \cdot \left[\frac{\pi}{2}\frac{2h}{\mu} - \pi\frac{h-n}{\mu}\right] \\
&= n\pi\hbar
\end{aligned}
$$

∎

■ $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$（ソリトン）ポテンシャル

$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$（ソリトン）ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$
\tanh x \equiv y\ , \quad dx = \frac{dy}{1-y^2}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_\mathrm{L} \to a_\mathrm{R} \\ \hline y & p \to q \end{array}
$$

を行っている．また，p, q は，

$$
p + q = 0\ , \quad pq = \frac{n^2}{h^2} - \frac{2n}{h}
$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.27) を用いた．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b \sqrt{2\hbar^2 nh - \hbar^2 n^2 - \hbar^2 h^2 \tanh^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \hbar \int_\alpha^\beta \sqrt{2nh - n^2 - h^2 y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\
&\equiv \hbar h \int_p^q \sqrt{(y-p)(q-y)}\,\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\
&= \hbar h \cdot \frac{\pi}{2}\left[2 - \sqrt{\frac{n^2}{h^2} - \frac{2n}{h} + 1} - \sqrt{\frac{n^2}{h^2} - \frac{2n}{h} + 1}\right] \\
&= n\pi\hbar
\end{aligned}
$$

∎

■ **Rosen–Morse ポテンシャル**

Rosen–Morse ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$
\tanh x \equiv y\ , \quad dx = \frac{dy}{1-y^2}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_\mathrm{L} \to a_\mathrm{R} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ , \quad \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - y^2
$$

を行っている．また，p, q は，

$$p+q=-\frac{2\mu}{h^2}\ ,\quad pq=\frac{(h-n)^2}{h^2}+\frac{\mu^2}{h^2(h-n)^2}-1$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.27) を用いた．

$$\begin{aligned}
I&=\int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}}\sqrt{\hbar^2h^2-\hbar^2(h-n)^2+\frac{\hbar^2\mu^2}{h^2}-\frac{\hbar^2\mu^2}{(h-n)^2}+\frac{\hbar^2h^2}{\cosh^2x}-2\hbar^2\mu\tanh x-\hbar^2h^2-\frac{\hbar^2\mu^2}{h^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\hbar\int_p^q\sqrt{-(h-n)^2-\frac{\mu^2}{(h-n)^2}+h^2(1-y^2)-2\mu y}\,\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}\\
&\equiv\hbar h\int_p^q\sqrt{(y-p)(q-y)}\,\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}\\
&=\hbar h\cdot\frac{\pi}{2}\left[2-\sqrt{\frac{2\mu}{h^2}+\frac{(h-n)^2}{h^2}+\frac{\mu^2}{h^2(h-n)^2}}-\sqrt{\frac{-2\mu}{h^2}+\frac{(h-n)^2}{h^2}+\frac{\mu^2}{h^2(h-n)^2}}\right]\\
&=n\pi\hbar
\end{aligned}$$

∎

■ 双曲的対称こま II

双曲的対称こま II の場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$\sinh x\equiv y\ ,\quad dx=\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}\ ,\quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}}\to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p\to q \end{array}\ ,\quad \cosh^2x=1+y^2$$

を行っている．また，p, q は，

$$p+q=-\frac{2h\mu}{(h-n)^2}\ ,\quad pq=1-\frac{h^2-\mu^2}{(h-n)^2}$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.26) を用いた．

$$\begin{aligned}
I&=\int_{a_{\mathrm{L}}}^{\mathrm{R}}\sqrt{2\hbar^2nh-\hbar^2n^2-\frac{-\hbar^2h^2+\hbar^2\mu^2+2\hbar^2h\mu\sinh x}{\cosh^2x}-\hbar^2h^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\hbar\int_p^q\sqrt{-(h-n)^2+\frac{h^2-\mu^2-2h\mu y}{1+y^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}}\\
&\equiv\hbar(h-n)\int_p^q\sqrt{(y-p)(q-y)}\,\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\\
&=\hbar(h-n)\cdot\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{h^2+\mu^2}{(h-n)^2}-1+\frac{h^2-\mu^2}{(h-n)^2}+1}-\pi\right]\\
&=n\pi\hbar
\end{aligned}$$

∎

■ **Eckart ポテンシャル**

Eckart ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$\coth x \equiv y\ , \quad dx = -\frac{dy}{y^2-1}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}} \to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ , \quad \cosh^2 x = 1 + y^2$$

を行っている．また，p, q は，

$$p + q = \frac{2\mu}{g^2}\ , \quad pq = \frac{(g+n)^2}{g^2} + \frac{\mu^2}{g^2(g+n)^2} - 1$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.28) を用いた．

$$\begin{aligned} I &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{\hbar^2 g^2 - \hbar^2(g+n)^2 + \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2} - \frac{\hbar^2\mu^2}{(g+n)^2} - \frac{\hbar^2 g^2}{\sinh^2 x} + 2\hbar^2\mu\coth x - \hbar^2 g^2 - \frac{\hbar^2\mu^2}{g^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= \hbar\int_p^q \sqrt{-(g+n)^2 - \frac{\mu^2}{(g+n)^2} - g^2(y^2-1) + 2\mu y}\left(-\frac{\mathrm{d}y}{y^2-1}\right) \\ &\equiv \hbar g\int_q^p \sqrt{(y-q)(p-y)}\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} \\ &= \hbar g\cdot\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{2\mu}{g^2} + \frac{(g+n)^2}{g^2} + \frac{\mu^2}{g^2(g+n)^2}} - \sqrt{-\frac{2\mu}{g^2} + \frac{(g+n)^2}{g^2} + \frac{\mu^2}{g^2(g+n)^2}} - 2\right] \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

■ **双曲的 Pöschl–Teller ポテンシャル**

双曲的 Pöschl–Teller ポテンシャルの場合について，SWKB 条件 (2.49) が成り立つことを示す．ただし，以下の式変形について，1 行目から 2 行目への変形では，変数変換：

$$\cosh 2x \equiv y\ , \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y^2-1}}\ , \quad \begin{array}{c|c} x & a_{\mathrm{L}} \to a_{\mathrm{R}} \\ \hline y & p \to q \end{array}\ , \quad \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{2}{y-1}\ , \quad \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{2}{y+1}$$

を行っている．また，p, q は，

$$p + q = -\frac{2(g^2-h^2)}{(h-g-2n)^2}\ , \quad pq = \frac{2(g^2+h^2)}{(h-g-2n)^2} - 1$$

を満たし，3 行目から 4 行目への変換には，式 (A.27) を用いた．

$$\begin{aligned} I &= \int_{a_{\mathrm{L}}}^{a_{\mathrm{R}}} \sqrt{4\hbar^2 n(h-g-n) - \frac{\hbar^2 g^2}{\sinh^2 x} + \frac{\hbar^2 h^2}{\cosh^2 x} - \hbar^2(h-g)^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \hbar\int_p^q \sqrt{-(h-g-2n)^2 - \frac{2g^2}{y-1} + \frac{2h^2}{y+1}}\ \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y^2-1}} \\ &\equiv \frac{\hbar(h-g-2n)}{2}\int_p^q \sqrt{(y-p)(q-y)}\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} \\ &= \frac{\hbar(h-g-2n)}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left[\frac{2h}{h-g-2n} - \frac{2g}{h-g-2n} - 2\right] \\ &= n\pi\hbar \end{aligned}$$

∎

附録C

対数摂動論

C.1　導入

対数摂動論 (logarithmic perturbation theory) は，1970 年代後半に Y. Aharonov らによって開発された [84, 85]，摂動計算の手法である．通常の摂動論（Rayleigh–Schrödinger の手法）と比べて，対数摂動論は，2 次以上の補正項が簡単に計算できるというメリットがある．つまり，対数摂動論では，通常の摂動論とは異なり，高次の摂動を求めるのに，非摂動状態の基底状態さえ分かればよく，非摂動状態の励起状態が分かっている必要はない．デメリットとしては，対数摂動論では，励起状態が扱えないことが挙げられる．しかしながら，超対称量子力学（解ける量子力学）の文脈では，基底状態波動函数を基本に議論を進めてゆくのであるから，対数摂動論の手法は充分に役立ち得る．

C.2　定式化

系のポテンシャルが，

$$V(x) = V_0(x) + gV_1(x)\ , \quad x \in (x_1, x_2) \tag{C.1}$$

と表される場合を考える．$V_0(x)$ は非摂動ポテンシャルであり，$gV_1(x)$ が摂動ポテンシャルである（g は，摂動パラメータ）．このとき，基底状態に対する Schrödinger 方程式は，

$$-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \big[V_0(x) + gV_1(x)\big]\psi_0(x) = E_0\psi_0(x) \tag{C.2}$$

と書ける．尚，ハミルトニアン $-\hbar^2 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + [V_0(x) + gV_1(x)]$ は，必ずしも半正定値とは限らない．

ここで，基底状態波動函数 $\psi_(x)$ を，$\psi(x) \equiv \mathrm{e}^{S(x)}$ 即ち $S(x) = \ln\psi(x)$ と書けば[註29]，Schrödinger 方程式 (C.2) は，

$$\begin{aligned} & -\hbar^2\left[S''(x) + S'(x)^2\right]\mathrm{e}^{S(x)} + \big[V_0(x) + gV_1(x)\big]\mathrm{e}^{S(x)} = E\mathrm{e}^{S(x)} \\ \therefore \quad & -\hbar^2\left[S''(x) + S'(x)^2\right] + V_0(x) + gV_1(x) - E = 0\ . \end{aligned} \tag{C.3}$$

と書き直される．以降，本章では，$'$ は x についての 1 次導函数を表すとする．また，この型の微分方程式は，Riccati 型の微分方程式とよばれている．

[註29] 基底状態波動函数は，常に全ての x に対して $\psi_0(x) > 0$ となるようにとることができる．他方，励起状態の波動函数については，必ず幾つかのノードをもち，実函数 $S(x)$ を定義できなくなってしまう．これが，前節で述べた，対数摂動論では励起状態を扱えないことの理由である．

次に，E_0 と $S'(x)$ とを g の冪で展開する：

$$\begin{cases} E_0 \cong E^{(0)} + gE^{(1)} + g^2E^{(2)} + \cdots = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} g^i E^{(i)} \ , & \text{(C.4)} \\ S'(x) \cong C^{(0)}(x) + gC^{(1)}(x) + g^2C^{(2)}(x) + \cdots = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} g^i C^{(i)}(x) \ . & \text{(C.5)} \end{cases}$$

これらを式 (C.3) に代入して，g の冪ごとに比較すると，以下の関係式を得る．まず，g^0 の項について，

$$\begin{aligned} &-\hbar^2 \left\{ C^{(0)'}(x) + \left[C^{(0)}(x) \right]^2 \right\} + V_0(x) - E^{(0)} = 0 \\ &\therefore \quad C^{(0)'}(x) + \left[C^{(0)}(x) \right]^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left[V_0(x) - E^{(0)} \right] \ . \end{aligned} \tag{C.6}$$

次に，g^1 の項については，

$$\begin{aligned} &-\hbar^2 \left[C^{(1)'}(x) + 2C^{(0)}(x)C^{(1)}(x) \right] + V_1(x) - E^{(1)} = 0 \\ &\therefore \quad C^{(1)'}(x) + 2C^{(0)}(x)C^{(1)}(x) = \frac{1}{\hbar^2} \left[V_1(x) - E^{(1)} \right] \end{aligned} \tag{C.7}$$

であり，一般に g^n の項については，

$$\begin{aligned} &-\hbar^2 \left[C^{(n)'}(x) + 2C^{(0)}(x)C^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} C^{(i)}(x)C^{(n-i)}(x) \right] - E^{(n)} = 0 \\ &\therefore \quad C^{(n)'}(x) + 2C^{(0)}(x)C^{(n)}(x) = -\frac{1}{\hbar^2} E^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} C^{(i)}(x)C^{(n-i)}(x) \end{aligned} \tag{C.8}$$

である．

以下では，式 (C.6)–(C.8) を解いてゆく．はじめに，式 (C.6) は非摂動ハミルトニアンの固有値問題である．$C^{(0)}(x)$ は，解ける量子力学の文脈におけるスーパーポテンシャル $W(x)$ に対応し，式 (2.13) から次のように求めることができる：

$$C^{(0)}(x) = \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \psi_0(x) \equiv -W(x) \ .$$

次に，式 (C.7) は，$|\psi_0(x)|^2$ を掛けて積分することで解くことができる．

$$C^{(1)'}(x)|\psi_0(x)|^2 + 2C^{(0)}(x)C^{(1)}(x)|\psi_0(x)|^2 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[C^{(1)}(x)|\psi_0(x)|^2 \right] \tag{C.9}$$

であることを用いれば，$C^{(1)}(x)$ は，

$$C^{(1)}(x) = |\psi_0(x)|^{-2} \cdot \frac{1}{\hbar^2} \int_{x_1}^{x} \left[V_1(\bar{x}) - E^{(1)} \right] |\psi_0(\bar{x})|^2 \, \mathrm{d}\bar{x} \tag{C.10}$$

と求まる．式 (C.10) で，$x \to x_2$ とすれば，$E^{(1)}$ が

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{x_1}^{x_2} \left[V_1(x) - E^{(1)} \right] |\psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ \therefore \quad E^{(1)} &= \int_{x_1}^{x_2} V_1(x)|\psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{C.11}$$

と求まる．ただし，$x \to x_{1,2}$ において $\psi_0(x) \to 0$ となり，$\psi_0(x)$ は規格化されているということを用いた．

式 (C.8) において，$n = 2$ とすると，

$$C^{(2)\prime}(x) + 2C^{(0)}(x)C^{(2)}(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}E^{(2)} - \left[C^{(1)}(x)\right]^2 \tag{C.12}$$

となり，これを用いて $C^{(2)}(x)$ 及び $E^{(2)}$ を求めることができる．$C^{(1)}(x)$ を求めたときと同様にして，

$$C^{(2)}(x) = |\psi_0(x)|^{-2} \int_{x_1}^{x} \left[-\frac{1}{\hbar^2}E^{(2)} - \left[C^{(1)}(\bar{x})\right]^2\right] |\psi_0(\bar{x})|^2 \, \mathrm{d}\bar{x} \ . \tag{C.13}$$

また，$x \to x_2$ として，

$$E^{(2)} = -\int_{x_1}^{x_2} \left[C^{(1)}(x)\right]^2 |\psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x \ . \tag{C.14}$$

一般の n に対して式 (C.8) を解くと（解き方は $n = 2$ の場合と同じである），

$$C^{(n)}(x) = |\psi_0(x)|^{-2} \int_{x_1}^{x} \left[-\frac{1}{\hbar^2}E^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} C^{(i)}(\bar{x})C^{(n-i)}(\bar{x})\right] |\psi_0(y)|^2 \, \mathrm{d}\bar{x} \tag{C.15}$$

$$E^{(n)} = -\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} C^{(i)}(x)C^{(n-i)}(x)\right) |\psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x \ . \tag{C.16}$$

を得る．

■ 例：Stark 効果の計算

本項では，例題として，Stark 効果の計算を対数摂動論を用いて行う．Stark 効果とは，荷電粒子に電場をかけたときに，エネルギー準位が分裂するなどエネルギースペクトルが変化する現象のことである．

調和振動子ポテンシャル $V_0(x) = m\omega^2 x^2/2$ 中に束縛されている電子を考える．この系に外部電場 $\mathcal{E}$ を印加すると，ポテンシャルに $V_1(x) = -e\mathcal{E}x$ が加わる．以下では，$V_1(x)$ を摂動項として取り扱い，そのエネルギー準位への寄与を見積もる．特に，基底状態のエネルギーの値はどうなるか．

まず，非摂動ハミルトニアンの基底状態のエネルギー固有値 $E^{(0)}$ と固有函数 $\psi_0(x)$ は，

$$E^{(0)} = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \text{and} \qquad \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \ .$$

である．摂動の 1 次補正 $E^{(1)}$ は，式 (C.11) から，

$$E^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-e\mathcal{E}x) \left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]\right]^2 \mathrm{d}x = -e\mathcal{E}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]}_{\text{odd}} \mathrm{d}x = 0$$

である．次に，$C^{(1)}(x)$ が式 (C.10) から次のように求まる：

$$\begin{aligned}
C^{(1)}(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] \cdot \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{x} (-e\mathcal{E}\bar{x}) \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\bar{x}^2\right]\,\mathrm{d}\bar{x} \\
&= -\frac{2me\mathcal{E}}{\hbar^2} \exp\left[\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] \int_{-\infty}^{x} \bar{x} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\bar{x}^2\right]\,\mathrm{d}\bar{x} \\
&= \frac{2me\mathcal{E}}{\hbar^2} \exp\left[\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] \cdot \frac{\hbar}{2m\omega} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\bar{x}^2\right]\Big|_{-\infty}^{x} \\
&= \frac{e\mathcal{E}}{\hbar\omega}\ .
\end{aligned}$$

よって，摂動の 2 次補正 $E^{(2)}$ は，式 (C.14) より，

$$\begin{aligned}
E^{(2)} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2m}\left(\frac{e\mathcal{E}}{\omega}\right)^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \\
&= -\frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}
\end{aligned}$$

である．更に，$C^{(2)}(x)$ は，式 (C.13) より，

$$C^{(2)}(x) = -\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\left(-\frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} + \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\right)}_{=0} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\bar{x}^2\right]\,\mathrm{d}\bar{x} = 0\ ,$$

と計算される．従って，摂動の 3 次補正は，$E^{(3)} = 0$ であり，$C^{(3)}(x)$ もゼロとなる．式 (C.15), (C.16) を考えれば，このことは，摂動の 3 次以降の補正項が全てゼロになることを意味している．

以上より，

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$

と求まる．ただし，計算の途中で $g = 1$ としている．

C.3 通常の摂動論との等価性

本節では，対数摂動論が，通常の摂動論，即ち Rayleigh–Schrödinger の摂動論と等価であることを示す．摂動の 1 次の項が，対数摂動論と通常の摂動論とで等しくなることは，前節で見た通りである．摂動の 2 次以上の項に対しても，両者が等しくなることを確認してゆく．

C.3.1 通常の摂動論が与える公式

通常の摂動論では，エネルギーに対する n 次の補正 $E_{\mathrm{RS}}^{(n)}$ は，

$$E_{\mathrm{RS}}^{(n)} = \int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x) V_1(x) \psi^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x \tag{C.17}$$

によって与えられる．ただし，エネルギー E と波動函数 $\psi(x)$ を，それぞれ

$$E \cong E_{\mathrm{RS}}^{(0)} + gE_{\mathrm{RS}}^{(1)} + g^2E_{\mathrm{RS}}^{(2)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} g^i E_{\mathrm{RS}}^{(i)}$$

$$\psi(x) \cong \psi^{(0)}(x) + g\psi^{(1)}(x) + g^2\psi^{(2)}(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} g^i \psi^{(i)}(x)$$

と展開している．

C.3.2 等価性の確認

■ **1 次の補正項 $E^{(1)}$**

1 次の補正項 $E^{(1)}$ に対して，通常の摂動論と対数摂動論とが与える結果が等しいことを示す．

$$E_{\mathrm{RS}}^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x)V_1(x)\psi^{(0)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} V_1(x)|\psi_0(x)|^2\mathrm{d}x = E^{(1)} \ .$$

■ **2 次の補正項 $E^{(2)}$**

2 次の補正項 $E^{(2)}$ に対して，通常の摂動論と対数摂動論とが与える結果が等しいことを示す．

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{RS}}^{(2)} &= \int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x)V_1(x)\psi^{(1)}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x)\left[V_1(x) - E^{(1)}\right]\psi^{(1)}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x)\left[V_1(x) - E^{(1)}\right]|\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[C^{(1)}(x)|\psi_0(x)|^2\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \hbar^2 \underbrace{\left[S^{(1)}(x)C^{(1)}(x)|\psi_0(x)|^2\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} \left[C^{(1)}(x)\right]^2|\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= -\hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} \left[C^{(1)}(x)\right]^2|\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= E^{(2)} \ .
\end{aligned}$$

■ **3 次の補正項 $E^{(3)}$**

3 次の補正項 $E^{(3)}$ に対して，通常の摂動論と対数摂動論とが与える結果が等しいことを示す．

$$
\begin{aligned}
E^{(3)}_{\mathrm{RS}} &= \int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x) V_1(x) \psi^{(2)}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x) \left[V_1(x) - E^{(1)}\right] \psi^{(2)}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[S^{(1)}(x)\right]^2 \left[V_1(x) - E^{(1)}\right] |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} S^{(2)}(x) \left[V_1(x) - E^{(1)}\right] |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[S^{(1)}(x)\right]^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[C^{(1)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]\ \mathrm{d}x + \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(2)}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[C^{(1)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar^2}{2} \underbrace{\left[[S^{(1)}]^2(x) C^{(1)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x) \left[C^{(1)}(x)\right]^2 |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&\qquad + \hbar^2 \underbrace{\left[S^{(2)}(x) C^{(1)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} C^{(1)}(x) C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= -\hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x) \left[C^{(1)}(x)\right]^2 |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x - \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} C^{(1)}(x) C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x\ .
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&- \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x) \left[C^{(1)}(x)\right]^2 |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= -\hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x) \left[-\frac{1}{\hbar^2} E^{(2)} |\psi_0(x)|^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x) E^{(2)} |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x + \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} S^{(1)}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]\ \mathrm{d}x \\
&= E^{(2)} \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \psi^{(0)*}(x) \psi^{(1)}\ \mathrm{d}x}_{=0} + \underbrace{\left[S^{(1)}(x) C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} C^{(1)}(x) C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= -\hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} C^{(1)}(x) C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

であるから，結局，

$$
\begin{aligned}
E^{(3)}_{\mathrm{RS}} &= -\hbar^2 \int_{x_1}^{x_2} 2 C^{(1)}(x) C^{(2)}(x) |\psi_0(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&= E^{(3)}\ .
\end{aligned}
$$

■ **n 次の補正項 $E^{(n)}$**

一般に，n 次の補正項 $E^{(n)}$ に対しても，これまでと同様に通常の摂動論と対数摂動論との等価性：

$$
E^{(n)}_{\mathrm{RS}} = E^{(3)}
$$

が示される [86]．我々は，$n = 4$ の場合についても，このことを確認している．

附録D

その他の可解系たち

D.1　準可解系

本節では，準可解 (quasi-exactly solvable; QES) 系 [15, 16, 17, 18] の簡単な解説を行う．

D.1.1　導入

まず初めに，準可解であるということについて説明しよう．準可解であるという場合には，次のふたつの状況が考えられる：

I. 系の固有状態のうち，初めの N 個の準位について，固有値と固有函数とが明示的に得られているもの．

II. パラメータの変更のみによって関連付けられる N 個のポテンシャル群のうち，i 番目のポテンシャルの i 番目の準位がそれぞれ明示的に関係付けられているようなもの．

これらの系は，例えば，物理現象の解析において，全ての固有状態の情報が必要ないような場合に用いられる．特に，$N \to \infty$ の極限では，通常の可解系に一致することが知られている．

以降では，I. の場合についてみてゆくことにする．

D.1.2　一般論

1 次元の Schrödinger 方程式が，

$$\mathcal{H}\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x) \ , \quad \mathcal{H} = -\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \ , \tag{D.1}$$

で与えられたとする．ここで，波動函数 $\psi(x)$ に対して，

$$\psi(x) = p(x) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int^x y(\overline{x}) \mathrm{d}\overline{x} \right] \ , \tag{D.2}$$

なる変換を施すことを考える．このとき，Schrödinger 方程式 (D.1) は，

$$\begin{aligned} \hbar^2 \left[\frac{y'}{\hbar} - \frac{y^2}{\hbar^2} - \frac{1}{p} \left(p'' - 2\frac{y}{\hbar} p' \right) \right] &= E - V(x) \\ = \ \hbar y' - y^2 - \frac{1}{p} \left(\hbar^2 p'' - 2\hbar y p' \right) \ . \end{aligned} \tag{D.3}$$

と書き換えられる．ただし，本小節では，以降，記号 $'$ は適当な空間座標微分についての 1 階導函数を表す．更に，変数変換：

$$\xi \equiv \frac{x}{\hbar} , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = \hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} ,$$

を施せば，式 (D.3) は，$\hbar$ に依存しない形で書かれる：

$$\breve{y}' - \breve{y}^2 - \frac{1}{\breve{p}} \left(\breve{p}'' - 2\breve{y}\breve{p}' \right) = E - \breve{V}(\xi) . \tag{D.4}$$

ただし，$\breve{y} = \breve{y}(\xi) = y(x)$, $\breve{p} = \breve{p}(\xi) = p(x)$, $\breve{V}(\xi) = V(x)$ である．準可解系は，特定の $\breve{y}(\xi)$ に対して，式 (D.4) の左辺第 3 項：$(\breve{p}'' - 2\breve{y}\breve{p}')/\breve{p}$ が既約になるように $\breve{p}(\xi)$ を定めることによって構築される．

$\breve{p}(\xi)$ のうち，特に，ノードがないものを $\breve{p}_0(\xi)$ と記せば，系の基底状態波動函数 $\breve{\psi}_0(\xi)$ は，

$$\breve{\psi}_0(\xi) = \breve{p}_0(\xi) \exp\left[- \int^{\xi} \breve{y}(\bar{\xi}) \mathrm{d}\bar{\xi} \right] , \tag{D.5}$$

で与えられる．このとき，スーパーポテンシャル $\breve{W}(\xi)$ とポテンシャル $\breve{V}(\xi)$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
\breve{W}(\xi) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{\psi}_0(\xi) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \left\{ \breve{p}_0(\xi) \exp\left[- \int^{\xi} \breve{y}(\bar{\xi}) \mathrm{d}\bar{\xi} \right] \right\} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \left[\ln \breve{p}_0(\xi) - \int^{\xi} \breve{y}(\bar{\xi}) \mathrm{d}\bar{\xi} \right] \\
&= \breve{y}(\xi) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{p}_0(\xi) , \qquad (\mathrm{D.6}) \\
V(x) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{\psi}_0(\xi) \right]^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \breve{\psi}_0(\xi) \\
&= \left[\breve{y}(\xi) - \hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{p}_0(\xi) \right]^2 - \hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \left[\breve{y}(\xi) - \hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{p}_0(\xi) \right] \\
&= \breve{y}(\xi)^2 - \frac{\mathrm{d}\breve{y}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + 2\breve{y}(\xi) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{p}_0(\xi) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln \breve{p}_0(\xi) \right]^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} \ln \breve{p}_0(\xi) \qquad (\mathrm{D.7})
\end{aligned}$$

と書かれる．

D.2 Abraham–Moses 系

本節では，Abraham–Moses 系 [42] の簡単な説明を与える．Abraham–Moses 系は，ある可解系を Abraham–Moses 変換することによって得られる可解系である．Krein–Adler 変換とは別種の，ハミルトニアンの等スペクトル変形である．Abraham–Moses 変換によって，元の系の特定の準位が削除されたり，元の系にある準位が加えられたりする．

D.3 Natanzon 類のポテンシャル

本節では，Natanzon 類のポテンシャル [39, 40, 41] の簡単な説明を与える．Natanzon 類のポテンシャルは，有限個の離散固有値をもち，その固有函数は，超幾何函数の和で書かれる．このクラスのポテンシャルは，一般的には形状不変性をもたないものの，一部のポテンシャルには形状不変性があることが分かっている [41].

附録E

本文の補足事項

E.1 Schrödinger 方程式の“導出”

E.1.1 Hamilton–Jacobi の方程式からの“導出”

■ **Hamilton–Jacobi の方程式**

空間 1 次元とする．$\{q, p, H(q,p;t)\}$ で表される古典力学系に対して，与えられたハミルトニアン H から，q, p を求める方法を知りたい．

そこで，$\mathscr{H}(Q,P;t) = 0$ となるような“極端な”正準変換：

$$\{q, p, H(q,p;t)\} \to \{Q, P, \mathscr{H}(Q,P;t)\} \tag{E.1}$$

を考える．このとき，正準方程式は，

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q} = 0 \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} P = \text{const.} \equiv \alpha & \text{(E.2a)} \\ Q = \text{const.} \equiv \beta & \text{(E.2b)} \end{cases}$$

であり，Q と P は共に定数である．次に，Q, P から元の q, p を求める方法を考える．II 型の正準変換：

$$\begin{cases} W' = W(q,P;t) - PQ \ , & \text{(E.3a)} \\ Q = \dfrac{\partial}{\partial P} W(q,P;t) \ , \quad p = \dfrac{\partial}{\partial q} W(q,P;t) \ , & \text{(E.3b)} \\ \mathscr{H} = H(q,p;t) + \dfrac{\partial}{\partial t} & \text{(E.3c)} \end{cases}$$

を用いると，

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} W(q,\alpha;t) \ , \tag{E.4}$$

$$p = \frac{\partial}{\partial q} W(q,\alpha;t) \ , \tag{E.5}$$

$$\mathscr{H} = H(q,p;t) + \frac{\partial}{\partial t}(q,\alpha;t) = H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}; t\right) + \frac{\partial}{\partial t} W(q,\alpha;t) \equiv 0 \tag{E.6}$$

である．母函数 W を求めるためには，式 (E.6) の偏微分方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}W(q,\alpha;t)+H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q};t\right)=0 \tag{E.7}$$

を解けばよい．この偏微分方程式は，Hamilton–Jacobi の偏微分方程式とよばれる（独立変数は，q と t である）．

以降，ハミルトニアン H が時間 t を陽に含まない場合を考える．このとき，H は，系の全力学的エネルギー E に等しい．式 (E.7) から，

$$W(q,\alpha;t)=at+S \tag{E.8}$$

と書ける．ただし，S は t には陽に依存せず，a は式 (E.7) に戻して，

$$a=-H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)\equiv -E \tag{E.9}$$

と分かる．更に，S は，$S=W(q,\alpha;t)-at$ の両辺を q で偏微分し，

$$\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{\partial W}{\partial q}$$

であることから，次のようにして求まる．つまり，S についての微分方程式：

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E$$

を解いて，

$$S=S(q,C;E) \tag{E.10}$$

と書き表される．ここで，C は，q で積分するときの積分定数である．系の全力学的エネルギー E は初期条件から決まるという意味で C の函数であり，式 (E.10) において，S は q と C の函数である，といえる．このことと式 (E.8) とを併せて考えると，C は α と等価であると分かる．従って，

$$S=S(q,\alpha)\ ,\quad E=E(\alpha)=-a=-a(\alpha) \tag{E.11}$$

である．

以上から，式 (E.4), (E.5) は，

$$\beta=-\frac{\partial}{\partial\alpha}E(\alpha)t+\frac{\partial}{\partial\alpha}S(q,\alpha)\ , \tag{E.12}$$

$$p=\frac{\partial}{\partial q}S(q,\alpha) \tag{E.13}$$

となる．ここで，α,β 及び E は初期条件から決定されるので，式 (E.12) から q が，式 (E.13) から p が求められる．

■ “導出”の過程

本項では，Hamilton–Jacobi の偏微分方程式 (E.7) から，変分原理を用いて Schrödinger 方程式を“導出”[註30] してゆく．

母函数 $W(q,\alpha;t)$ として，次の形を採る：

$$W(q,\alpha;t) \equiv K \ln\left[\mathrm{e}^{-Et/K}\psi(q)\right] = -Et + K\ln\psi(q)\ . \tag{E.14}$$

式 (E.8) との対応を考えれば，$S \equiv S(q,K) \equiv K\ln\psi(q)$ である．式 (E.13) から，

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q} \tag{E.15}$$

であり，系の全力学的エネルギー E は，

$$E \equiv \frac{1}{2m}p^2 + V(q) = \frac{1}{2m}\left(\frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 + V(q) \tag{E.16}$$

と書かれる．よって，

$$\frac{K^2}{2m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 - [E - V(q)]\psi^2 = 0 \tag{E.17}$$

を得る．

ここで，「式 (E.17) の左辺が q 空間における積分に対して，停留点をとるような運動が実現する」と考えることで，

$$\delta I = 0\ , \quad I \equiv \int_{q_1}^{q_2}\left\{\frac{K^2}{2m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 - [E-V(q)]\psi^2\right\}\,\mathrm{d}q \tag{E.18}$$

をから，

$$\begin{gathered}[E-V(q)]\psi + \frac{K^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = 0 \\ \therefore \quad \left[-\frac{K^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\psi(q) = E\psi(q)\end{gathered} \tag{E.19}$$

を得る．K の次元は，作用の次元 $\mathsf{ML^2T^{-2}}$ と同じであることから，$K \equiv \hbar$ とおけば，時間に依存しない Schrödinger 方程式：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\psi(q) = E\psi(q)$$

が導かれる．

尚，時間に依存する Schrödinger 方程式については，

$$W(q,\alpha;t) \equiv K\ln\Psi(q,t) \tag{E.20}$$

として，Hamilton–Jacobi の偏微分方程式を用いれば，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t) = H(q,p;t)\Psi(q,t) \tag{E.21}$$

が得られる．ただし，$K \equiv \hbar/\mathrm{i}$ とした．

[註30] 本来，量子論は古典論から導かれるものではないので，量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式を古典力学の方程式から導出する，という表現は適切でない．ダブルクォテーションマークを付して“導出”と書いたことには，このような事情がある．この“導出”は，単に対応関係を表しているに過ぎない．

E.2　1次元量子力学系にはエネルギーの縮退がないことの証明

本小節では，次の命題を示す：

> 時間に依存しない1次元の量子力学系において，束縛状態のエネルギースペクトルは常に非縮退的である．　　$\cdots(*)$

$(*)$ の否定：「時間に依存しない1次元の量子力学系において，束縛状態のエネルギースペクトルが縮退することがある」が真であると仮定する．このとき，$\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ とを同じエネルギー固有値 E に属する，ふたつの線型独立な固有函数とする．定常状態の Schrödinger 方程式：

$$-\phi_1'' + V(x)\phi_1 = E\phi_1\ , \quad -\phi_2'' + V(x)\phi_2 = E\phi_2 \tag{E.22}$$

より，

$$\frac{\phi_1''}{\phi_1} = \frac{\phi_2''}{\phi_2} \qquad \therefore \quad (\phi_1'\phi_2 - \phi_2'\phi_1)' = 0 \tag{E.23}$$

である．ただし，記号 $'$ は x で微分することを表し，簡単のため $\hbar = 2m = 1$ とした．また，$V(x)$ は，ポテンシャルである．

式 (E.23) より，

$$\phi_1'\phi_2 - \phi_2'\phi_1 = \text{const.} \equiv 0 \tag{E.24}$$

とできる．定数を 0 としたのは，境界条件：$|x| \to \infty$ で $\phi_1 \to 0$, $\phi_2 \to 0$，を課しているからである．適当に式変形すれば，任意定数 C を用いて，$\phi_1(x) = C\phi_2(x)$ が導かれる．これは，$\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ とが線型独立であることに矛盾するため，$(*)$ が示される．

E.3　Riccatiの微分方程式の解法

1階の常微分方程式のうち，

$$y'(x) = P(x) + Q(x)y(x) + R(x)y(x)^2 \tag{E.25}$$

の形のものを，Riccati の微分方程式という．y は x の未知函数で，記号 $'$ は x についての1階導函数を表す．また，$P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ は，x の函数である．

この微分方程式の一般解は知られていないが，解法としては次の2つが知られている：

(i) 特解 y_1 が見つけられる場合，$y = y_1 + u$ とおいて，Berunoulli の微分方程式に帰着させる．

(ii) $y = -\dfrac{v'}{vR}$ とおいて，2階の線形常微分方程式：

$$v'' - \left(\frac{R'}{R} + Q\right)v + PRv = 0 \tag{E.26}$$

に帰着させる．

E.4　N 体問題の取り扱いと超球面調和函数

E.4.1　Jacobi 相対座標系

2 体問題において，重心座標と相対座標とに分離してその運動を議論することがしばしばある．Jacobi 相対座標系（または，Jacobi 座標系）の考えは，この取り扱いを一般の N 体問題に拡張したものである．少数多体系を考える際には，この Jacobi 座標系が用いられることが多い．以下では，N 体問題（N 粒子系）を考え，各粒子には，1 から N まで番号が振られており，それぞれの粒子の位置と質量はその番号 i を用いて $\boldsymbol{r}_i$, m_i のように記される．この場合，Jacobi 座標系は N 本のベクトルを基底とする座標系である．

ここでは，簡単のために等質量の場合を考える（質量が異なる場合の取り扱いは，文献 [81] を参照）．まず初めに，Jacobi 座標系を構成する 1 番目のベクトル $\boldsymbol{\rho}_1$ を，粒子 1 と 2 の位置ベクトルを用いて，

$$\boldsymbol{\rho}_1 \coloneqq \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \ . \tag{E.27}$$

で定義する．続いて，Jacobi 座標系を構成する 2 番目のベクトル $\boldsymbol{\rho}_2$ には，粒子 1, 2 から成る粒子系の質量中心と粒子 3 とを結ぶベクトル：

$$\boldsymbol{\rho}_2 \coloneqq \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} - \boldsymbol{r}_3 \ . \tag{E.28}$$

を採用する．Jacobi 座標系を構成する 3 番目から $N-1$ 番目までのベクトルは，$\boldsymbol{\rho}_2$ と同様にして，例えば，i 番目の $\boldsymbol{\rho}_i$ を，粒子 1–i から成る粒子系の質量中心と粒子 $i+1$ とを結ぶベクトルとして定義する：

$$\boldsymbol{\rho}_i \coloneqq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{i} m_k\boldsymbol{r}_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{i} m_k} - \boldsymbol{r}_{i+1} \ . \tag{E.29}$$

最後に，Jacobi 座標系を構成する N 番目のベクトル $\boldsymbol{\rho}_N$ は，N 粒子系の質量中心ベクトル

$$\boldsymbol{\rho}_N \coloneqq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{r}_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} m_k} \equiv \boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}} \tag{E.30}$$

とする．以上のベクトルの取り方の概略を示したのが，図 E.1 である．

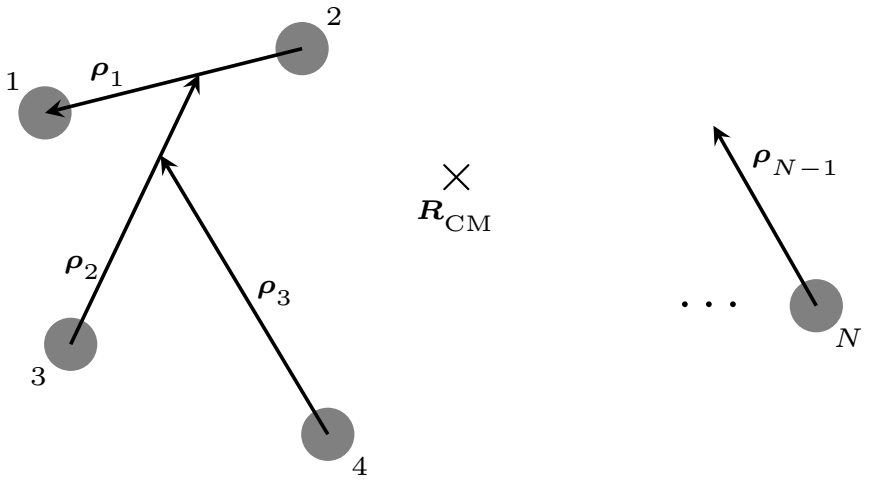


図 E.1　Jacobi 座標系.

E.4.2　超球面座標の導入

前節で導入した Jacobi 座標系を用いることで，運動項を重心運動と内部運動とに分離できる：

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_i}^2=-\frac{1}{2m_{\mathrm{tot}}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}}^2-\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\rho}_i}^2\ . \tag{E.31}$$

ただし，m_{tot} は系の全質量で，μ は換算質量 (reduced mass) である.

重心運動を除いた内部運動に関して，運動の自由度は $3(N-1)$ である．$N-1$ 本の Jacobi 座標ベクトル $\boldsymbol{\rho}_i$ が極座標で $\{\rho_i,\theta_i,\varphi_i\}$ と表示されたとしたとき，動径成分たち $\{\rho_1,\ldots,\rho_{N-1}\}$ に対して，次の変数変換を施す：

$$x\coloneqq\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1}{\rho_i}^2}\ , \tag{E.32}$$

$$\xi_1\coloneqq\arccos\frac{\rho_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1}{\rho_i}^2}}\ , \tag{E.33}$$

$$\xi_2\coloneqq\arccos\frac{\rho_2}{\sqrt{\sum_{i=2}^{N-1}{\rho_i}^2}}\ , \tag{E.34}$$

$$\vdots$$

$$\xi_{N-2}\coloneqq\arccos\frac{\rho_{N-2}}{\sqrt{{\rho_{N-1}}^2+{\rho_{N-2}}^2}}\ . \tag{E.35}$$

x はハイパー動径成分で，超球空間における動径部分である．また，それ以外の成分 $\{\xi_1,\ldots,\xi_{N-2},\theta_1,\varphi_1,\ldots,\theta_{N-1},\varphi_{N-1}\}$ は超球空間における角度部分であり，まとめて Ω と書いてハイパー角とよぶ.

ハイパー動径 x にのみ依存してハイパー角 Ω には依存しないような，所謂“中心力問題”を考えることができ，このような定式化は，hypercentral formalism とよばれる．このとき，各々の i に対して，3 つの量子数 $\{n_i, \ell_i, m_i\}$ が与えられる．

E.4.3 超球面調和函数

本小節では，超球面調和函数 (hyperspherical harmonics) [78, 79, 80] の表式を示す．具体的な導出は，これらの文献を参照のこと．

超球面調和函数 $\mathscr{Y}_{[\gamma]}(\Omega)$ は，

$$\mathscr{Y}_{[\gamma]}(\Omega) = Y_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1) \prod_{j=2}^{N-1} Y_{\ell_j}^{m_j}(\theta_j, \varphi_j)\, {}^{(j)}P_{L_j(\xi_j)}^{\ell_j, L_j-1} \tag{E.36}$$

と表される．ただし，γ は，ハイパー角運動量の量子数とよばれ，

$$\gamma = \ell_1 + \sum_{i=2}^{N-1} (2n_i + \ell_i) \ . \tag{E.37}$$

である．また，$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ は球面調和函数で，${}^{(j)}P_{L_j(\xi_j)}^{\ell_j, L_j-1}$ は

$${}^{(j)}P_{L_j(\xi_j)}^{\ell_j, L_j-1} \coloneqq \mathcal{N} (\cos\xi_j)^{\ell_j} (\sin\xi_j)^{L_{j-1}} P_{n_j}^{\nu_{j-1}, \ell_j + 1/2}(\cos 2\xi_j) \ , \tag{E.38}$$

$$\mathcal{N} \equiv \sqrt{\frac{2\nu_j \left(\nu_j - n_j\right) n_j!}{\Gamma\left(\nu_j - n_n - \ell_j - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n_j + \ell_j + \frac{3}{2}\right)}} \ , \tag{E.39}$$

$$\nu_j \equiv L_j + \frac{3j}{2} - 1 \ , \quad L_j \equiv \ell_1 + \sum_{i=2}^{j} (2n_i + \ell_i) \tag{E.40}$$

である（$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は，Jacobi 多項式）．

附録F

量子力学における超対称性

F.1　円周上に束縛された自由粒子

半径 R の円周上に束縛された自由粒子の 1 次元量子力学系を考える．「円周上」というのは，つまり，周期境界条件：

$$\psi(x+2\pi R)=\psi(x)\ , \tag{F.1}$$

が課されている，ということである．

このような系に対する Schrödinger 方程式は，

$$\mathcal{H}\psi_n(x)=\mathcal{E}_n\psi_n(x)\ ,\quad \mathcal{H}=-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ ,\quad x\in[-\pi R,\pi R] \tag{F.2}$$

と書かれる．これを解くと，

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_n(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_n}}{\hbar}\right)^2\psi_n(x)\quad\Longrightarrow\quad \psi_n(x)\propto\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\sqrt{\mathcal{E}_n}}{\hbar}x\right)\\ \sin\left(\dfrac{\sqrt{\mathcal{E}_n}}{\hbar}x\right)\end{cases} \tag{F.3}$$

を得る．ただし，エネルギー固有値 $\mathcal{E}_n$ は，周期境界条件 (F.1) から，

$$\frac{\sqrt{\mathcal{E}_n}}{\hbar}\times 2\pi R\equiv 2n\pi\qquad\therefore\quad \mathcal{E}_n=\left(\frac{n\hbar}{R}\right)^2 \tag{F.4}$$

と求められる．従って，固有値 $\mathcal{E}_n$ に属する固有函数は，

$$\psi_n^{(-)}(x)=\mathcal{N}_n^{(-)}\cos\left(\frac{n}{R}x\right)\ ,\quad n=0,1,2,\dots\ , \tag{F.5}$$

と

$$\psi_n^{(+)}(x)=\mathcal{N}_n^{(+)}\sin\left(\frac{n}{R}x\right)\ ,\quad n=1,2,\dots\ ^{\text{註31}} \tag{F.6}$$

であり，$n\geqslant 1$ では，縮退があることが分かる．ただし，$\mathcal{N}_n^{\pm}$ は適当な規格化定数である．

$\{\psi_n^{(-)}(x)\}$ と $\{\psi_n^{(+)}(x)\}$ との縮退構造は，図 2.1 と全く同じ縮退構造：

- エネルギー固有値は非負である：$\mathcal{E}_n\geqslant 0$,
- $\mathcal{E}_0=0$ の状態を除いて，全ての $\mathcal{E}_n>0$ の状態は縮退している，

[註31] $n=0$ のとき，$\psi_n^{(+)}(x)=0$ となり，このような状態はない．

である．しかし，本節では，因子化ハミルトニアンも超対称パートナーも出て来ていない．我々は，本節での解析を通して，円周上に束縛された自由粒子の系には，（系自体に）量子力学の意味での超対称性が存在していることを確認することができた．

本節の最後に，この系の縮退構造の物理的意味を述べる．結論は，同じエネルギーをもった，右回りの波と左回りの波とが存在しているために，エネルギーの縮退をもつ，というものである．このことは，固有函数系の基底を変えることで，確かめられる：

$$\psi_n^{(\mathrm{R})}(x) = \mathcal{N}_n^{(\mathrm{R})}\left[\cos\left(\frac{n}{R}x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{n}{R}x\right)\right] = \mathcal{N}_n^{(\mathrm{R})}\exp\left(\mathrm{i}\frac{n}{R}x\right)\ , \tag{F.7}$$

$$\psi_n^{(\mathrm{L})}(x) = \mathcal{N}_n^{(\mathrm{L})}\left[\cos\left(\frac{n}{R}x\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{n}{R}x\right)\right] = \mathcal{N}_n^{(\mathrm{L})}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{n}{R}x\right)\ . \tag{F.8}$$

尚，$\mathcal{N}_n^{(\mathrm{R})}, \mathcal{N}_n^{(\mathrm{L})}$ は適当な規格化定数である．

F.2 Witten模型

式 (2.8), (2.17) で書かれるパートナーのハミルトニアンたち：

$$\mathcal{H}_- = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x)^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\ , \tag{2.8}$$

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = -\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x)^2 + \hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.17}$$

を用いて，次のような行列型のハミルトニアンを定義する：

$$\begin{aligned}\mathsf{H} &:= \begin{pmatrix}\mathcal{H}_- & 0\\ 0 & \mathcal{H}_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} & 0\\ 0 & \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\end{pmatrix} \\ &= \left[-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x)^2\right]\mathbf{1}_{(2)} - \hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\sigma_3 = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathbf{1}_{(2)} + \left(-2\hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathbf{1}_{(2)}+\sigma_3}{2}\ .\end{aligned} \tag{F.9}$$

ただし，$\mathbf{1}_{(2)}$ は 2×2 の単位行列で，Pauli 行列を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と書き[註32]，以降 $\sigma_\pm := \sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2$ とする．また，

$$\frac{\mathbf{1}_{(2)}+\sigma_3}{2} \equiv f^\dagger f$$

とすれば，ハミルトニアン H は，

$$\mathsf{H} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathbf{1}_{(2)} + \left(-2\hbar\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\right)f^\dagger f \tag{F.10}$$

となる．尚，$f^\dagger, f$ はそれぞれ，Fermi 粒子に対する生成演算子と消滅演算子に対応しており，$W(x) = \omega x$（1 次元調和振動子）の場合，ハミルトニアン H_{HO} は，Bose 粒子に対する生成演算子と消滅演算子 $b, b^\dagger$ を用いて，

$$\mathsf{H}_{\mathrm{HO}} = \hbar\omega\left(b^\dagger b + f^\dagger f\right)$$

註32

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\ ,\quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ .$$

と書かれ，Bose 粒子に対する生成・消滅演算子と Fermi 粒子に対する生成・消滅演算子とが対等である．

ハミルトニアン H は，超電荷 (supercharges) とよばれるふたつの演算子：

$$\mathcal{Q} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\sigma_- \ , \quad \mathcal{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+ \mathcal{A}^\dagger \tag{F.11}$$

と共に，閉じた代数を成す．超電荷 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$ は，Bose 的状態を Fermi 的状態に，また Fermi 的状態を Bose 的状態に写す働きをする．この代数は，$N = 2$ 超対称性代数 (superalgebra) とよばれ，3 つの生成子 $\{\mathsf{H}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}$ が

$$\left.\begin{aligned} &[\mathsf{H}, \mathcal{Q}] = [\mathsf{H}, \mathcal{Q}^\dagger] = 0 \ , \\ &\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\} = \mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger = \mathsf{H} \ , \quad \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\} = \{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}^\dagger\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{F.12}$$

なる交換・反交換関係を満たす．第 1 式の交換関係から，$\mathcal{H}_\pm$ は縮退していることが分かる（この式は，2.2.4 節の絡み合わせ関係式 (2.20) と等価である）．

ここで，$\mathcal{H}_\pm$ のゼロ固有値の状態は，それぞれ，形式的に，

$$\mathcal{H}_- \psi_0^{(-)}(x) = 0 \iff \mathcal{A}\psi_0^{(-)}(x) = 0 \qquad \therefore \ \psi_0^{(-)}(x) \propto \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int^x W(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}\right] \ , \tag{F.13}$$

$$\mathcal{H}_+ \psi_0^{(+)}(x) = 0 \iff \mathcal{A}^\dagger \psi_0^{(+)}(x) = 0 \qquad \therefore \ \psi_0^{(+)}(x) \propto \exp\left[+\frac{1}{\hbar}\int^x W(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}\right] \tag{F.14}$$

と書かれる．これらの表式から，$\psi_0^{(-)}, \psi_0^{(+)}$ の両者が規格化可能（2 乗可積分）とはなり得ない．つまり，規格化可能な（2 乗可積分な）ゼロ固有値の状態は，$\psi_0^{(-)}, \psi_0^{(+)}$ のいずれか一方か，またはいずれも当てはまらないかであることが分かる．特に後者の場合，超対称性が破れている (SUSY is broken) といわれる．超対称性が破れるか否かは，$W(x)$ の函数形に依存する．以降では，超対称性が破れていない場合，$\psi_0^{(-)}$ が（規格化可能な）ゼロ固有値の状態である場合を考える．

ハミルトニアン H の基底状態 $|0\rangle$ を，列ベクトルで

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_0^{(-)}(x) \\ \psi_0^{(+)}(x) \end{pmatrix} \tag{F.15}$$

と書くと，超対称性が破れない (unbroken) のは，

$$\mathcal{Q}\,|0\rangle = \mathcal{Q}^\dagger\,|0\rangle = 0 \ , \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^{(-)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{F.16}$$

のときで，式 (F.12) の第 2 式から，基底状態のエネルギーはゼロになることが分かる．他方，超対称性が破れている場合には，$\mathcal{Q}\,|0\rangle$ と $\mathcal{Q}^\dagger\,|0\rangle$ とは共にゼロにはならず，基底状態は正のエネルギーをもち，$\psi_0^{(\pm)}(x)$ が縮退している構造をもつ．

最後に，Witten 指数 (Witten index) とよばれる位相不変量を導入して，この節を終えることにする．Witten 指数は，

$$\Delta_{\mathrm{W}} \coloneqq \mathrm{Tr}\,(-1)^F \equiv \mathrm{Tr}\,\sigma_3 \tag{F.17}$$

で定義される．ここで，Tr は全ての状態についてのトレース（対角和）で，超対称性が破れていない場合の基底状態を除き，$\mathcal{H}_-$ の固有状態と $\mathcal{H}_+$ の固有状態とは対を成しており，状態の個数は等しく $\Delta_{\mathrm{W}} = 0$ となる．他方，超対称性が破れていない場合には，$\mathcal{H}_-$ は $\mathcal{H}_+$ と比べて，ゼロ固有値の状態を 1 つ多くもつため，$\Delta_{\mathrm{W}} = 1$ である．従って，$\mathcal{H}_-$ と $\mathcal{H}_+$ の基底状態の個数をそれぞれ $\mathscr{N}_0^{(-)}$, $\mathscr{N}_0^{(+)}$ と書けば，Witten 指数は，

$$\Delta_{\mathrm{W}} = \mathscr{N}_0^{(-)} - \mathscr{N}_0^{(+)} = \begin{cases} 1 & （超対称性が破れていない場合） \\ 0 & （超対称性が破れている場合） \end{cases} \tag{F.18}$$

と計算される[註33]．既に超対称性が破れるか否かは $W(x)$ の函数形に依ると述べたが，より具体的には，超対称性が破れるかを考えることは波動函数の規格化可能性を考えることであるから，

$$\int^x W(\bar{x})\, \mathrm{d}\bar{x}$$

の漸近的な振る舞いに着目すればよいことが分かる．Witten 指数 Δ_{W} が位相不変量であるということは，Δ_{W} の値が $\int^x W(\bar{x})\, \mathrm{d}\bar{x}$ の漸近的な振る舞いのみで決まり，他の要素（例えば極値の数）には依らないことを意味している．

[註33] $\psi_0^{(+)}$ が（規格化可能な）ゼロ固有値の状態である場合には，$\Delta_{\mathrm{W}} = -1$ と計算される．

参考文献

[1] E. Schrödinger, "A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions," in *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 46, pp. 9–16, JSTOR. 1940.

[2] L. Infeld and T. Hull, "The factorization method," *Reviews of modern Physics* **23** no. 1, (1951) 21.

[3] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*. Oxford university press, fourth ed., 1981. The first edition of this work appeared in 1930.

[4] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*. Courier Corporation, 1950.

[5] E. Witten, "Dynamical breaking of supersymmetry," *Nuclear Physics B* **188** no. 3, (1981) 513–554.

[6] E. Witten, "Constraints on supersymmetry breaking," *Nuclear Physics B* **202** no. 2, (1982) 253–316.

[7] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, "Supersymmetry and quantum mechanics," *Physics Reports* **251** no. 5-6, (1995) 267–385.

[8] B. K. Bagchi, *Supersymmetry in quantum and classical mechanics*. CRC Press, 2000.

[9] F. Cooper, A. Khare, and U. P. Sukhatme, *Supersymmetry in quantum mechanics*. World Scientific, 2001.

[10] G. Junker, *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, and C. Rasinariu, *Supersymmetric quantum mechanics: An introduction*. World Scientific Publishing Company, 2017.

[12] C. Fernandez and J. David, "Trends in supersymmetric quantum mechanics," *arXiv e-prints* (2018) arXiv–1811.

[13] L. E. Gendenshtein, "Derivation of exact spectra of the Schrodinger equation by means of supersymmetry," *Jetp Lett* **38** no. 6, (1983) 356–359.

[14] R. Sasaki, "Exactly solvable quantum mechanics," *arXiv preprint arXiv:1411.2703* (2014) .

[15] A. Turbiner and A. Ushveridze, "Spectral singularities and quasi-exactly solvable quantal problem," *Physics Letters A* **126** no. 3, (1987) 181–183.

[16] A. Turbiner, "Quantum mechanics: problems intermediate between exactly solvable and completely unsolvable," *Soviet Phys. JETP* **67** no. 2, (1988) 230–236.

[17] A. Turbiner, "Quasi-exactly-solvable problems and $sl(2)$ algebra," *Communications in Mathematical Physics* **118** no. 3, (1988) 467–474.

[18] A. V. Turbiner, "One-dimensional quasi-exactly solvable Schrödinger equations," *Physics Reports* **642** (2016) 1–71.

[19] P. M. Morse, "Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels," *Physical review* **34** no. 1, (1929) 57.

[20] M. Crum, "ASSOCIATED STURM–LIOUVILLE SYSTEMS," *The Quarterly Journal of Mathematics* **6** no. 1, (1955) 121–127.

[21] G. Darboux, "On a proposition relative to linear equations," *CR Acad. Sci. Paris* **94** no. physics/9908003, (1882) 1456–59.

[22] A. Comtet, A. Bandrauk, and D. K. Campbell, "Exactness of semiclassical bound state energies for supersymmetric quantum mechanics," *Physics Letters B* **150** no. 1-3, (1985) 159–162.

[23] R. Dutt, A. Khare, and U. P. Sukhatme, "Exactness of supersymmetric WKB spectra for shape-invariant potentials," *Physics Letters B* **181** no. 3-4, (1986) 295–298.

[24] A. Khare and Y. Varshni, "Is shape invariance also necessary for lowest order supersymmetric WKB to be exact?," *Physics Letters A* **142** no. 1, (1989) 1–4.

[25] D. DeLaney and M. M. Nieto, "SUSY-WKB is neither exact nor never worse than WKB for all solvable potentials," *Physics Letters B* **247** no. 2-3, (1990) 301–308.

[26] M. Hruska, W.-Y. Keung, and U. Sukhatme, "Accuracy of semiclassical methods for shape-invariant potentials," *Physical Review A* **55** no. 5, (1997) 3345.

[27] J. Bougie, A. Gangopadhyaya, and C. Rasinariu, "The supersymmetric WKB formalism is not exact for all additive shape invariant potentials," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **51** no. 37, (2018) 375202.

[28] D. T. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A. Pagnamenta, and U. Sukhatme, "New exactly solvable Hamiltonians: shape invariance and self-similarity," *Physical Review A* **48** no. 4, (1993) 2786.

[29] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson, "Supersymmetry and algebraic Darboux transformations," *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37** no. 43, (2004) 10065.

[30] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson, "An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm–Liouville problem," *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **359** no. 1, (2009) 352–367.

[31] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson, "An extension of Bochner's problem: exceptional invariant subspaces," *Journal of Approximation Theory* **162** no. 5, (2010) 987–1006.

[32] C. Quesne, "Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** no. 39, (2008) 392001.

[33] S. Odake and R. Sasaki, "Infinitely many shape invariant potentials and new orthogonal polynomials," *Physics Letters B* **679** no. 4, (2009) 414–417.

[34] S. Odake and R. Sasaki, "Another set of infinitely many exceptional (X_ℓ) Laguerre polynomials," *Phys. Lett.* **B684** (2010) 173–176, `arXiv:0911.3442 [math-ph]`.

[35] R. Sasaki, S. Tsujimoto, and A. Zhedanov, "Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux–Crum transformations," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **43** no. 31, (2010) 315204.

[36] S. Odake and R. Sasaki, "Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials," *Physics Letters B* **702** no. 2-3, (2011) 164–170.

[37] M. G. Krein, "On a continuous analogue of a Christoffel formula from the theory of orthogonal polynomials," in *Doklady Akademii Nauk*, vol. 113, pp. 970–973, Russian Academy of Sciences. 1957.

[38] V. Adler, "A modification of Crum's method," *Theoretical and Mathematical Physics* **101** no. 3, (1994) 1381–1386.

[39] G. Natanzon, "General properties of potentials for which the Schrödinger equation can be solved by means of hypergeometric functions," *Theoretical and Mathematical Physics* **38** no. 2, (1979) 146–153.

[40] J. N. Ginocchio, "A class of exactly solvable potentials. I. One-dimensional Schrödinger equation," *Annals of Physics* **152** no. 1, (1984) 203–219.

[41] F. Cooper, J. N. Ginocchio, and A. Khare, "Relationship between supersymmetry and solvable potentials," *Physical Review D* **36** no. 8, (1987) 2458.

[42] P. Abraham and H. Moses, "Changes in potentials due to changes in the point spectrum: anharmonic oscillators with exact solutions," *Physical Review A* **22** no. 4, (1980) 1333.

[43] G. Junker and P. Roy, "Conditionally exactly solvable potentials: a supersymmetric construction method," *Annals of Physics* **270** no. 1, (1998) 155–177.

[44] 倉本義夫ら, 現代物理学［基礎シリーズ］1『量子力学』, 朝倉書店 (2008).

[45] S. Leonard I, *QUANTUM MECHANICS*. McGraw-Hill, third ed., 1968.

[46] E. Lifshitz, LD, and S. L. (JB), *Quantum Mechanics; Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 1965.

[47] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Longman, revised ed., 1994.

[48] 猪木慶治ら, 『量子力学 I・II』, 講談社 (1994).

[49] 坂本眞人, 臨時別巻・数理科学 SGC ライブラリ 96『量子力学から超対称性へ　超対称性のエッセンスを捉える』, サイエンス社 (2012).

[50] 佐々木隆, 臨時別巻・数理科学 SGC ライブラリ 122『可解な量子力学系の数理物理直交多項式の生み出す多様な展開』, サイエンス社 (2016).

[51] 佐武一郎, 数学選書 1『線型代数学』, 裳華房 (1958).

[52] B. Mielnik, "Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum," *Journal of mathematical physics* **25** no. 12, (1984) 3387–3389.

[53] D. J. Fernández, "New hydrogen-like potentials," *letters in mathematical physics* **8** no. 4, (1984) 337–343.

[54] P. Leach, "Exact solutions of the Schrödinger equation for a class of anharmonic oscillators," *Physica D: Nonlinear Phenomena* **17** no. 3, (1985) 331–338.

[55] A. Mitra, P. Roy, A. Lahiri, and B. Bagchi, "Nonuniqueness of the factorization scheme in quantum mechanics," *International journal of theoretical physics* **28** no. 8, (1989) 911–916.

[56] T. Fukui and N. Aizawa, "Shape-invariant potentials and an associated coherent state," *Physics Letters A* **180** no. 4-5, (1993) 308–313.

[57] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, and U. P. Sukhatme, "Shape invariance and its connection to potential algebra," in *Supersymmetry and Integrable Models*, pp. 341–350. Springer, 1998.

[58] S. Chaturvedi, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, P. Panigrahi, C. Rasinariu, and U. Sukhatme, "Algebraic shape invariant models," *Physics Letters A* **248** no. 2-4, (1998) 109–113.

[59] C. Rasinariu, J. V. Mallow, and A. Gangopadhyaya, "Exactly solvable problems of quantum mechanics and their spectrum generating algebras: A review," *Central European Journal of Physics* **5** no. 2, (2007) 111–134.

[60] J. Bougie, A. Gangopadhyaya, J. Mallow, and C. Rasinariu, "Supersymmetric quantum mechanics and solvable models," *Symmetry* **4** no. 3, (2012) 452–473.

[61] E. J. Routh, "On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order," *Proceedings of the London Mathematical Society* **1** no. 1, (1884) 245–262.

[62] S. Bochner, "Über Sturm–Liouvillesche Polynomsysteme," *Mathematische Zeitschrift* **29** no. 1, (1929) 730–736. https://doi.org/10.1007/BF01180560.

[63] S. Odake and R. Sasaki, "Krein–Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46** no. 24, (2013) 245201.

[64] A. de Souza Dutra, "Conditionally exactly soluble class of quantum potentials," *Physical review A* **47** no. 4, (1993) R2435.

[65] O. von Roos, "Position-dependent effective masses in semiconductor theory," *Physical Review B* **27** no. 12, (1983) 7547.

[66] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, and V. Tkachuk, "Deformed shape invariance and exactly solvable Hamiltonians with position-dependent effective mass," *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** no. 13, (2005) 2929.

[67] Y. Nasuda and N. Sawado, "Numerical study of the SWKB condition of novel classes of exactly solvable systems," *Modern Physics Letters A* (2020) 2150025.

[68] J. Bougie, A. Gangopadhyaya, and J. V. Mallow, "Generation of a complete set of additive shape-invariant potentials from an Euler equation," *Physical review letters* **105** no. 21, (2010) 210402.

[69] J. Bougie, A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, and C. Rasinariu, "Generation of a novel exactly solvable potential," *Physics Letters A* **379** no. 37, (2015) 2180–2183.

[70] J. V. Mallow, A. Gangopadhyaya, J. Bougie, and C. Rasinariu, "Inter-relations between additive shape invariant superpotentials," *Physics Letters A* **384** no. 6, (2020) 126129.

[71] S. Bera, B. Chakrabarti, and T. K. Das, "Application of conditional shape invariance symmetry to obtain the eigen-spectrum of the mixed potential $V(r) = ar + br^2 + c/r + l(l+1)/r^2$," *Physics Letters A* **381** no. 16, (2017) 1356–1361.

[72] B. Chakrabarti and T. K. Das, "Existence of conditional shape invariance symmetry for singular power potential $V(r) = ar^2 + br^{-4} + cr^{-6}$," *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** no. 22, (2002) 4701.

[73] B. Chakrabarti and T. K. Das, "Conditionally exactly solvable singular even power potential in supersymmetric quantum mechanics," *Modern Physics Letters A* **17** no. 21, (2002) 1367–1375.

[74] B. Chakrabarti, "Energy eigenvalues of a quantum anharmonic oscillator from supersymmetry: the concept of conditional shape-invariance symmetry," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** no. 40, (2008) 405301.

[75] S. Bera, R. K. Yadav, B. Chakrabarti, and B. P. Mandal, "Role of conditional shape invariance symmetry property to obtain eigen-spectrum of the generalized polynomial potential with a Coulomb term," *arXiv preprint arXiv:1706.00168* (2017) .

[76] P. A. Zyla, *et al.* (Particle Data Group), "Review of Particle Physics," *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2020** no. 8, (2020) 083C01.

[77] M. Ferraris, M. Giannini, M. Pizzo, E. Santopinto, and L. Tiator, "A three-body force model for the baryon spectrum," *Physics Letters B* **364** no. 4, (1995) 231–238.

[78] L. Delves, "Tertiary and general-order collisions," *Nuclear Physics* **9** no. 3, (1958) 391–399.

[79] L. Delves, "Tertiary and general-order collisions (II)," *Nuclear Physics* **20** (1960) 275–308.

[80] J. Ballot and M. F. de La Ripelle, "Application of the hyperspherical formalism to the trinucleon bound state problems," *Annals of physics* **127** no. 1, (1980) 62–125.

[81] S. Rosati, "The hyperspherical harmonic method: a review and some recent developments," *Introduction To Modern Methods Of Quantum Many-Body Theory And Their Applications* (2002) 339–378.

[82] K. Thakkar, Z. Shah, A. K. Rai, and P. Vinodkumar, "Excited state mass spectra and Regge trajectories of bottom baryons," *Nuclear Physics A* **965** (2017) 57–73.

[83] I. Gradshteyn, I. Ryzhik, and R. H. Romer, *Tables of Integrals, Series, and Products*. American Association of Physics Teachers, fifth ed., 1988.

[84] Y. Aharonov and C. Au, "New approach to perturbation theory," *Physical Review Letters* **42** no. 24, (1979) 1582.

[85] C. Au and Y. Aharonov, "Logarithmic perturbation expansions," *Physical Review A* **20** no. 6, (1979) 2245.

[86] T. Imbo and U. Sukhatme, "Logarithmic perturbation expansions in nonrelativistic quantum mechanics," *American Journal of Physics* **52** no. 2, (1984) 140–146.