2′. 重心系から見た速度

授業プリントでは，以下のように書かれている．

重心から見た物体 A, B の相対速度 u_1, u_2 は，

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1 - v_{\mathrm{G}} = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \\
u_2 &= v_2 - v_{\mathrm{G}} = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) = -\frac{m_1}{m_2}u_1
\end{aligned}
$$

と書かれる．これは，言い換えると，

> **重心から見ると，**
>
> **物体 A, B は，質量の逆比の大きさに，逆向きの速度で運動している**
>
> **ように見える**

ということである．

※ 速度が「質量の逆比の大きさに逆向き」ということは，変位も「質量の逆比の大きさに逆向き」である．

授業で扱った 問題 では，板の長さが ℓ と決められていたために，それを元に「質量の逆比の大きさに逆向き」を用いて，座標 x_1, x_2 を求めることができた．しかし，一般の 2 体問題の場合はどのように解けば良いのだろうか？

重心から見た物体 A, B の相対速度 u_1, u_2 に注目してみよう．u_1, u_2 は，

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \\
u_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)
\end{aligned}
$$

と書き表されるのであった．これはつまり，

> **重心から見ると，**
>
> **物体 A, B は，相対速度を質量の逆比に内分する大きさに，逆向きの速度で運動している**
>
> **ように見える**

ということができる．では，どのように相対速度を求めれば良いのだろうか？

3. 相対運動と運動エネルギー

運動エネルギーに着目してみよう．ここで

運動エネルギーの変化量 ＝ 力のした仕事の総和

であった．系の運動エネルギー K は，

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_\mathrm{G}+u_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_\mathrm{G}+u_2\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1{v_\mathrm{G}}^2 + m_1v_\mathrm{G}u_1 + \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_\mathrm{G}}^2 + m_2v_\mathrm{G}u_2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right){v_\mathrm{G}}^2 + v_\mathrm{G}\left(m_1u_1+m_2u_2\right) + \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right){v_\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right){v_\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_1}{m_1+m2}(v_1-v_2)\right)^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right){v_\mathrm{G}}^2}_{\text{重心運動の運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2}_{\text{相対運動の運動エネルギー}}
\end{aligned}
$$

と変形できる．言い換えると，

> 運動エネルギーは，
>
> 重心運動の運動エネルギー と 相対運動の運動エネルギー とに分けられる

となる．

従って，重心速度が一定の場合（運動量保存則が成り立つような系の場合，外力の寄与がない場合）について，

運動エネルギーの変化量 ＝ 相対運動の運動エネルギーの変化量 ＝ 内力のした仕事の総和

の関係があることが分かる．

これを用いることとで，相対速度が求められ，物体 A, B の速度や変位を求められるようになる．このことを利用して解く問題が， 発展問題 である．