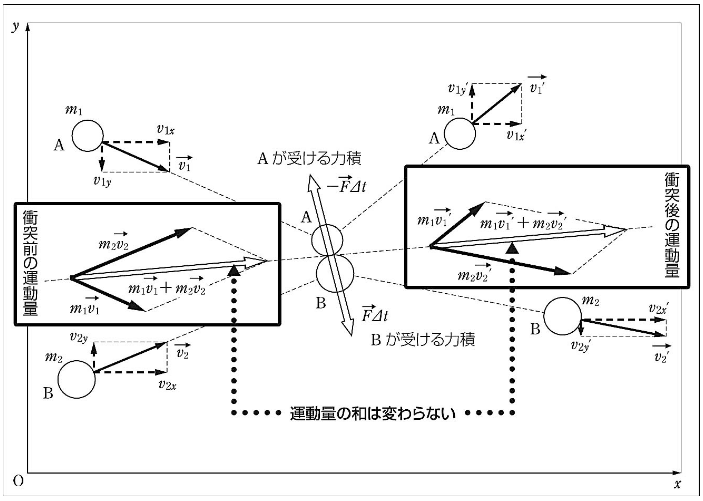
3　反発係数（はねかえり係数）[1]

3.1　衝突の一般論

衝突のとき，



衝突は瞬間的に起こる

$\Longrightarrow$ 外力の力積は無視できる．

よって，運動量は保存する：

1________________________________

では，

衝突の前後で，運動エネルギー[2] は保存するだろうか？ $\Longrightarrow$ 2____________

衝突前後の運動エネルギーの差を ΔK とすると，

- $|\Delta K| = 0$ のとき，3________________________ [3]
- $|\Delta K| > 0$ のとき，4________________________ [4]
    - 特に，$|\Delta K| = |\Delta K_{\max}|$ のとき，5________________________ [5]

とよばれる．

衝突前後で運動エネルギーが変わるということは，

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

6__________________ ということ．

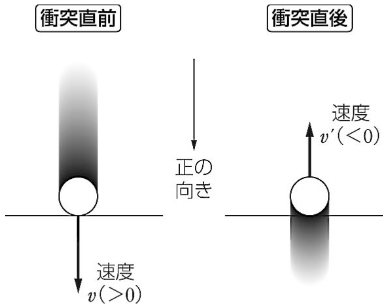
$\Longrightarrow$ この現象を詳しくみてゆきましょう．

---

1) coefficient of restitution
2) kinetic energy
3) elastic collision
4) inelastic collision
5) perfectly inelastic collision

3.2　1 次元の衝突

① 床や壁（面）との衝突



衝突の前後で，速度が，逆向きに e 倍になったと考えると，

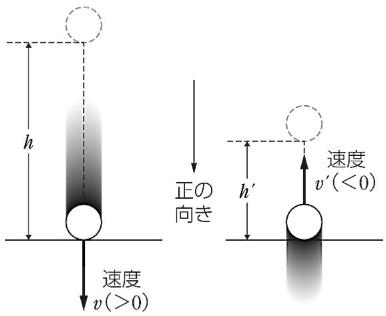
7 $\Longleftrightarrow$ 8

と表される．ここで，e は 9＿＿＿＿＿＿＿ といわれる．
また，

- 10＿＿＿＿＿＿のとき，$|\Delta K| = 0$ で，（完全）弾性衝突
- 11＿＿＿＿＿＿＿＿のとき，$|\Delta K| > 0$ で，非弾性衝突
  - 特に，12＿＿＿＿＿＿のとき，$|\Delta K| = |\Delta K_{\max}|$ で，完全非弾性衝突

となる．

①′ バウンドの高さと反発係数



力学的エネルギー保存則から，

（衝突前） 13＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
（衝突後） 14＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　∴　$v =$ 15＿＿＿＿＿，$v' =$ 16＿＿＿＿＿ ．

よって，

$$e = -\frac{v'}{v} = \text{17\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \qquad \therefore \quad \text{18\_\_\_\_\_\_\_\_} .$$

$\boxed{+\alpha}$

● n 回バウンドしたときの高さ

バウンドが 2 回繰り返されたときのバウンドの高さ h_2 は，$h_2 = e^2 h' = e^2 \cdot e^2 h$ で，バウンドが n 回繰り返されたときのバウンドの高さ h_n は，

$$h_n = \underbrace{e^2 \cdot \cdots \cdot e^2}_{n\text{ 回}} h = e^{2n} h$$

となる．$0 < e < 1$ のとき，$n \to \infty$ で，

$$h_n = e^{2n} h \longrightarrow 0$$

となる（バウンドしなくなる）．

● バウンドの所用時間と反発係数

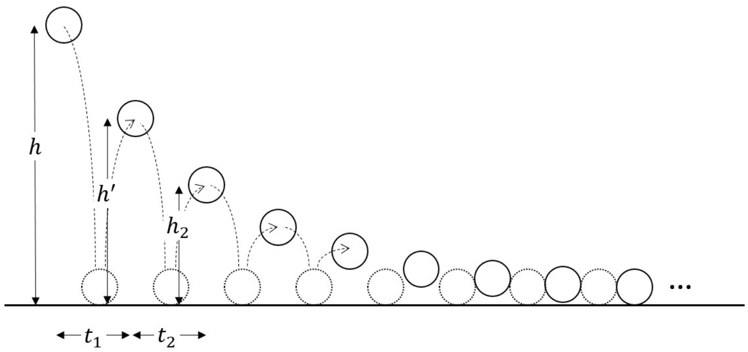
ボールを落下させてから次に最高点に到達するまで（1 回のバウンド）にかかる時間 t_1 は，

$$t_1 = \frac{v}{g} + \frac{v'}{g} = (1+e)\frac{v}{g}$$

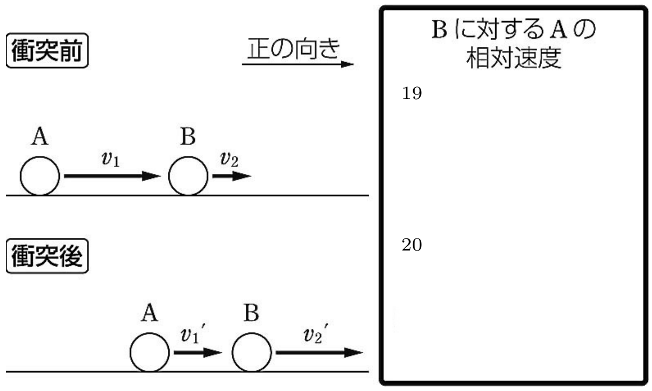
となるので，次のバウンドにかかる時間 t_2 は，

$$t_2 = \frac{v'}{g} + \frac{v''}{g} = e(1+e)\frac{v}{g} = et_1\ .$$

よって，バウンドにかかる時間は，バウンド毎に e 倍になる．



② **2 物体の衝突**



2 物体 A, B の衝突も，**B から A をみる**[6] と，「(B を面だと思って）面との衝突」と同じように考えられる．B とともに動く観測者には，

- **B は** $_{21}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ みえる．
- **A は**（相対）速度

（衝突前）$_{22}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

（衝突後）$_{23}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ で運動しているようにみえる．

よって，①で $v \to v_1 - v_2$，$v' \to v_1{}' - v_2{}'$ と置き換えると，

24 $\Longleftrightarrow$ 25

となる．これは，

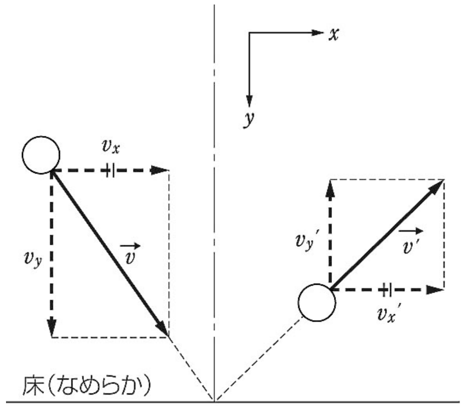
B からみると，A は $_{26}$_ _

ことを表している．

[6] A から B をみてもよい．

3.3　2次元の衝突

③ なめらかな床との斜めの衝突



なめらかな床に物体が斜めに衝突するとき，

物体には $_{27}$_ _ _ _ _ _ 方向にしか $_{28}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ のので，

速度の $_{29}$_ _ _ _ _ _ 方向成分だけが変化する（速度の水平方向成分は変化しない）.

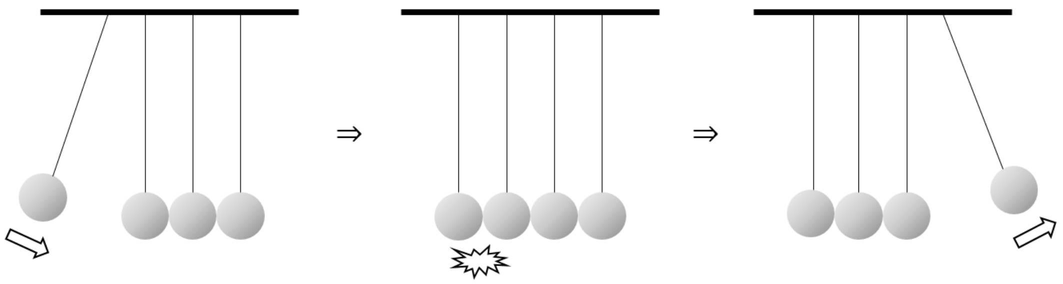
よって，

$$\begin{cases} v_x{}' = {}_{30}\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \\ \\ v_y{}' = {}_{31}\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \quad . \end{cases}$$

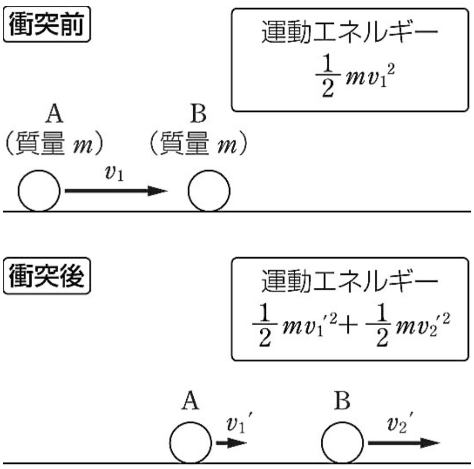
※ 摩擦のある床との衝突を考えるときは，運動量の水平方向成分が摩擦力の力積によって変化する.

3.4 衝突と力学的エネルギー

Newton 振り子



簡単なモデルで「**Newton 振り子**」の原理を考えてみる．



運動量保存則と反発係数の式とから，

$$\begin{cases} {}_1\text{- - - - - - - - - - - - - -} \\ {}_2\text{- - - - - - - - - - -} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} {}_3\text{- - - - - - - - - -} \\ {}_4\text{- - - - - - - - - -} \end{cases} .$$

よって，

$\underline{v_1{}' = {}_5\qquad\qquad}$ ，　$\underline{v_2{}' = {}_6\qquad\qquad}$

$\underline{e=1 \text{ のとき}}$（完全弾性衝突のとき），

$v_1{}' = {}_7$- - - - - ，$v_2{}' = {}_8$- - - - - $\Longrightarrow$ ${}_9$- - - - - - - - - - - が起こっている（運動エネルギーの変化 $|\varDelta K|$ はゼロ）．

※ これは，「Newton 振り子」の原理を説明している！

一般に，エネルギーの変化量 ΔK は，

$$\Delta K \quad = \quad {}_{10}$$

：運動エネルギーは ${}_{11}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ .

これより，$e = 0$ のとき（完全非弾性衝突のとき）の運動エネルギーの変化は，

$$|\Delta K| = {}_{12}\text{\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_} \quad ：{}_{13}\text{\_ \_ \_ \_ \_ \_}$$

となる．

力学的エネルギーの観点から以上をまとめると，

- $e = 1$ のとき，$\Delta K = 0$ で，力学的エネルギーは ${}_{14}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ .
- $0 \leqq e < 1$ のとき，$\Delta K < 0$ で，力学的エネルギーは ${}_{15}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ .
  - 特に，$e = 0$ のとき，$|\Delta K| = |\Delta K_{\max}|$ で，力学的エネルギーの変化は ${}_{16}$_ _ _ _ _ _ _ _ _ .