■ 2体問題の扱い

一般に，2 体問題では，2 物体の運動をそれぞれ考えるのではなく，**重心運動**と**相対運動**（内部運動）とに分けて考えると考えやすい．

2 物体の衝突の場合

2 物体の衝突の問題も，2 体問題である．ここでは，衝突前後における運動エネルギーの変化 $|\Delta K|$ を，この立場で考えてみよう．

重心速度 $\vec{v}_{\mathrm{G}}$ は，

$$\vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

で表され，いま外力の影響は無視できる場合を考えているので，運動量保存則から重心速度 $\vec{v}_{\mathrm{G}}$ は一定である．

また，重心から見た衝突前の物体 A, B の相対速度 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ は，物体 B から見た物体 A の相対速度を $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ とすると，

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{\mathrm{r}}\ , \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{\mathrm{r}} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1
\end{aligned}$$

と表される．更に，衝突の前後で，相対速度が

$$\vec{v}_{\mathrm{r}}' = -\varepsilon\vec{v}_{\mathrm{r}}\ ^{*}$$

となったとすると，重心から見た衝突前の物体 A, B の相対速度 $\vec{u}_1', \vec{u}_2'$ は，

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1' &= \vec{v}_1' - \vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1' - \vec{v}_2') = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\varepsilon\vec{v}_{\mathrm{r}}\ , \\
\vec{u}_2' &= \vec{v}_2' - \vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_2' - \vec{v}_1') = \frac{m_1}{m_1+m_2}\varepsilon\vec{v}_{\mathrm{r}} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1'
\end{aligned}$$

と表される．

このとき，

$$\begin{aligned}
|\Delta K| &= \left|\left(\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^{\,} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'\right) - \left(\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{u}_1'\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{u}_2'\right)^2 - \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{u}_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{u}_2\right)^2\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}m_1\vec{u}_1'^2 + \underbrace{\left(m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2'\right)}_{=\vec{0}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2'^2 - \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 - \underbrace{\left(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\right)}_{=\vec{0}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{G}} - \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}m_1\vec{u}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2'^2 - \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 - \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2\right| = \left|\frac{1}{2}m_1\vec{u}_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\varepsilon^2\vec{v}_{\mathrm{r}}^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{\mathrm{r}}^2\right| = (1-\varepsilon^2)\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{\mathrm{r}}^2
\end{aligned}$$

となる．ここで，慣性質量 $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ を用いると，

$$\boxed{|\Delta K| = (1-\varepsilon^2)\frac{1}{2}\mu\vec{v}_{\mathrm{r}}^2}$$

が得られる．

* 通常，反発係数 e は「衝突面に垂直な速度成分の大きさの比」で定義されているため，ここでは，「速さの比」として異なる文字 ε（「イプシロン」とよむ；ギリシャ文字の “e”）を用いた．1 次元での運動を考える場合，$\varepsilon = e$ としてよい．