工業数学演習 II — 線型代数　*as of May 30, 2024*

（担当： 奈須田[*]）

目 次

1　はじめに

みなさん，はじめまして．線型代数を担当する奈須田です．　— 担当が決まって以来，何を題材にしようか，いろいろと考えました．せっかくなので，単にこれまでに学んできたことの復習というよりは，その一歩先にある話題を扱った方が面白いだろうと思い，（私の研究とも関連の深い）直交多項式をテーマにすることにしました（より抽象的な代数学への導入ということも考えられましたが，私の能力を超えてしまうので諦めました）．この 2 回の授業は，「線型代数学 III」「線型代数学特論」といった名前の授業のような性格かもしれません．ただ，この授業は「演習」の授業なので，講義がメインになってしまわぬよう，このノートでは，具体的に手を動かしながら ≒ 問題を解きながら 直交多項式論に入門できるよう，問題を配置したつもりです．最近，大学の教科書なんかで流行っている「演習形式で学ぶ〇〇」というスタイルに近いかもしれません．

直交多項式は，それ自身が数学的対象として面白いだけでなく，その応用範囲の広さの点でも，学ぶ価値がある，そして授業で扱う価値もあるテーマだと信じています．（数学や物理だけでなく）生命科学や工学の分野でも，しばしば直交多項式は現れます！

【課題】　以下に取り組み，**6/27（木）の 16:00 までに** Teams のクラス内の提出先に提出すること．

- 問題 [**4**], [**8**], [**9**], [**14**], [**18**], [**19**], [**26**], [**28**], [**33**], [**37**] を解く（必修）；
- 上述の問題と授業中に解説した問題以外の問題を解く（任意）；
- 問題 [**37**] で挙げた題材について，詳細な解説を行う．あるいは，本稿のテーマである直交多項式について，自分なりにまとめる（任意）．

[*]所属：一般教科（自然科学）
居室：管理棟・一般教科棟 3 階 305 号室（奈須田教員室）　E-mail: `y.nasuda@gunma-ct.ac.jp`

2 復習

ここでは，以降の準備として，まずベクトルや線型写像などについて復習する．

2.1 ベクトル空間

集合 $\mathcal{V}$ が次の条件（公理）を満たすとき，$\mathcal{V}$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間（線型空間）といい，$\mathcal{V}$ の元をベクトルと呼ぶ．ただし，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ である．

(I) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$ に対して和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

- (i) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ （交換律）；
- (ii) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ （結合律）；
- (iii) 零ベクトルと呼ばれる特別な元 $\boldsymbol{0}$ がただ一つ存在し，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$ に対して $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；
- (iv) 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x}'\in\mathcal{V}$ がただ一つ存在する（これを $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルといい，$-\boldsymbol{x}$ と表す）．

(II) $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$, $a\in\mathbb{K}$ に対して定数倍（スカラー倍）$a\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

- (v) $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$；
- (vi) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$；
- (vii) $(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})$；
- (viii) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

[1] （ベクトル空間の例）

以下が，それぞれ適当な加法とスカラー乗法によって，ベクトル空間の公理 (I), (II) を満たしていることを確認せよ．

- $\mathbb{K}$ の元を係数とする 1 変数多項式全体の集合.
- $\mathbb{K}$ の元を係数とする 1 変数多項式のうち，n 次以下の多項式の集合.
- 区間 $[a,b]$ で定義された，$\mathbb{K}$ に値をとる 1 変数関数全体の集合.
- 各項が $\mathbb{K}$ に値をとる数列全体の集合.
- $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列全体の集合.

2.1.1 計量ベクトル空間

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{V}$ がさらに次の条件を満たすとき，$\mathcal{V}$ を計量ベクトル空間（計量線型空間，内積空間）という．

(III) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{K}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

- (ix) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$；
- (x) $(\boldsymbol{x},c\boldsymbol{y})=c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\bar{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；
- (xi) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$；
- (xii) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqslant 0$ であり，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ となるのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のときに限る．

例.　区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積 (f,g) を

$$(f,g)=\int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,w(x)dx \tag{2.1}$$

で定義する．ここで，$w(x)$ は正定値で，重み関数と呼ばれる．特に $(f,g)=0$ のとき，$f(x)$ と $g(x)$ とは直交するという．また，$\sqrt{(f,f)}$ を $f(x)$ のノルムといい，$\|f(x)\|$ で表すことがある．

[2]（計量ベクトル空間の例）

区間 $[a,b]$ で定義された関数全体の集合が，式 (2.1) で定義される内積によって，計量ベクトル空間の公理 (III) を満たしていることを確認せよ．

2.2　線型写像

$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への写像 $\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{T}$ を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への線形写像，あるいは $\mathcal{T}$ は線型であるという．

(i) $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\mathcal{T}\boldsymbol{x}+\mathcal{T}\boldsymbol{y}$；

(ii) $\mathcal{T}(a\boldsymbol{x})=a(\mathcal{T}\boldsymbol{x})$.

特に，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ 自身への線型写像を，線型変換という．

[3]（微分演算子の線型性）

$D=c_n\dfrac{d^n}{dx^n}+c_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots c_1\dfrac{d}{dx}+c_0$ は，関数に作用する演算子（作用素；operator）である．$D:\ y(x)\mapsto Dy(x)$ が線型であることを確かめよ．ただし，c_j は定数とする．

3　直交多項式論 序論

3.1　直交多項式（1 変数）

ここでは，直交多項式の定義を与える．まず，（変数 x についての）多項式とは，

$$\sum_{j=0}^{n}a_jx^j=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{3.1}$$

の型で書かれる式のことである．ただし，a_j は x に依らない定数で（x^j の）係数と呼ばれる．本稿では，特に断らない限り，多項式の係数 a_j は実とする．$a_n\neq 0$ のとき，多項式の次数は n であるといい，この多項式を $q_n(x)$ などと表す．

多項式列 $\{q_n(x)\}=\{q_0(x),q_1(x),q_2(x),\ldots\}$ が

$$(q_n,q_m)=\int_a^b q_n(x)q_n(x)\,w(x)dx=h_n\delta_{n,m}\ ,\quad 0<h_n<\infty \tag{3.2}$$

を満たしているとき，$\{q_n(x)\}$ を直交多項式（系）**(orthogonal polynomials)** と呼ぶ．以降，多項式がこの直交関係を満たす直交多項式のとき，特に（$q_n(x)$ ではなく）$p_n(x)$ と書くことにする．

表 3.1 に，主な直交多項式について，その名称及び記号，定義される区間，重み関数をまとめた（もちろん直交多項式はこれら以外にも数多く存在する）．以降，適宜この表を参照すること．

表 3.1: 直交多項式（1 変数）の例.

名称	記号	区間	重み関数 $w(x)$	備考
Legendre 多項式	$P_n(x)$	$[-1,1]$	1	$P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)$
Hermite 多項式	$H_n(x)$	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	
Laguerre (Sonine) 多項式	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$[0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	
Jacobi 多項式	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$[-1,1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	
第 1 種 Tchebyshev 多項式	$T_n(x)$	$[-1,1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x)=P_n^{(-\frac12,-\frac12)}(x)$
第 2 種 Tchebyshev 多項式	$U_n(x)$	$[-1,1]$	$\sqrt{1-x^2}$	$U_n(x)=P_n^{(\frac12,\frac12)}(x)$
Gegenbauer（超球）多項式	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$[-1,1]$	$(1-x^2)^\alpha$	$C_n^{(\alpha)}(x)=P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$

3.2 直交多項式系の構成

3.2.1 規格化（正規化）

以下では，直交関係 (3.2) に基づいて，直交多項式系 $\{p_n(x)\}$ の構成を行う．しかし，直交関係だけでは定数倍の不定性が残り，直交多項式系を一意に定めることはできない．そこで何らかの条件が必要となる．この条件を規格化（正規化）条件といい，これを課して直交関係を満たす直交多項式系を一意に定めることを規格化（正規化）するという．規格化条件には，$h_n=1$（正規直交多項式）や最高次の係数を 1 にとる（モニック直交多項式）など，よく用いられるものが幾つかあるが，これらに限る必要はない．

3.2.2 “愚直な”方法

ここではまず，直交関係 (3.2) から直接，直交多項式系 $\{p_n(x)\}$ を構成することを考える．$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$ のようにおいて，直交関係によって定数 a_j たちを定めてゆけば（定数倍の不定性を除いて）直交多項式系を構成することができる．

[4] （Legendre 多項式の構成①）

区間 $[-1,1]$，重み関数 $w(x)=1$ の場合に，直交関係 (3.2) を満たすように直交多項式系 $\{P_0(x),P_1(x),P_2(x)\}$ を構成せよ．ただし，$P_n(1)=1$ とする．

[5] （Hermite 多項式の構成①）

区間 $(-\infty,\infty)$，重み関数 $w(x)=e^{-x^2}$ の場合に，直交関係 (3.2) を満たすように直交多項式系 $\{H_0(x),H_1(x),H_2(x)\}$ を構成せよ．ただし，$h_n=2^nn!\sqrt{\pi}$ とし，最高次の係数は正にとれ．

[6] （Laguerre 多項式の構成①）

区間 $[0,\infty)$，重み関数 $w(x)=x^\alpha e^{-x}$ の場合に，直交関係 (3.2) を満たすように直交多項式系 $\{L_0^{(\alpha)}(x),L_1^{(\alpha)}(x),L_2^{(\alpha)}(x)\}$ を構成せよ．ただし，$h_n=\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2n!}$ とし，最高次の係数は正にとれ．

[7] （Jacobi 多項式の構成①）

区間 $[-1,1]$，重み関数 $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ の場合に，直交関係 (3.2) を満たすように直交多項式系 $\{P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), P_2^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ を構成せよ．ただし，

$$h_n=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{2n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

とし，最高次の係数は正にとれ．

3.2.3 Grum–Schmit の直交化法

直交多項式系を系統的に構成する方法を考えよう．そこで参考になるのは，ベクトル空間の正規直交基底を与えられた基底から構成する方法の Grum–Schmit の直交化法である．

[8] （Grum–Schmit の直交化法：復習）

Grum–Schmit の直交化法を用いて，$\mathbb{R}^3$ の基底

$$\left\{\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

を正規直交基底に直せ．（ヒント：まず，$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ を直交化して $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ を作る：

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1\ ,\quad \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1\ ,\quad \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1-\frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2\ .$$

次に，これらを正規化して，正規直交基底 $\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3\}$：

$$\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}}\boldsymbol{b}_1\ ,\quad \boldsymbol{c}_2=\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}}\boldsymbol{b}_2\ ,\quad \boldsymbol{c}_3=\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_3)}}\boldsymbol{b}_3\ ,$$

を得る．）

[9] （Legendre 多項式の構成②）

直交関係 (3.2) で区間 $[-1,1]$，重み関数 $w(x)=1$ の場合に，$\{1,x,x^2,x^3\}$ を Grum–Schmit の直交化法により直交化せよ（正規化はしなくて良い）．

[10] （Hermite 多項式の構成②）

直交関係 (3.2) で区間 $(-\infty,\infty)$，重み関数 $w(x)=e^{-x^2}$ の場合に，$\{1,x,x^2,x^3\}$ を Grum–Schmit の直交化法により直交化せよ（正規化はしなくて良い）．

[11] （Laguerre 多項式の構成②）

直交関係 (3.2) で区間 $[0,\infty)$，重み関数 $w(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ の場合に，$\{1,x,x^2,x^3\}$ を Grum–Schmit の直交化法により直交化せよ（正規化はしなくて良い）．

[12] （Jacobi 多項式の構成②）

直交関係 (3.2) で区間 $[-1,1]$，重み関数 $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ の場合に，$\{1,x,x^2,x^3\}$ を Grum–Schmit の直交化法により直交化せよ（正規化はしなくて良い）．

3.3 直交多項式が満たす漸化式

Grum–Schmit の直交化法は，直交多項式系を構成する系統的な方法であるが，多項式の次数が上がると共に計算の手間も増大することが難点である．そこで，直交多項式系を再帰的に構成する方法を考えよう．

直交多項式系 $\{p_n(x)\}$ に対して，漸化式：

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) + C_n p_{n-1}(x) \ , \quad n \geqslant 0 \ , \quad p_{-1}(x) \equiv 0 \ , \tag{3.3}$$

が成立することが知られている．ただし，A_n, B_n, C_n は適当な定数である．

[13] （直交多項式が満たす漸化式の導出）

直交多項式系 $\{p_n(x)\}$ に対して，$p_n(x)$ の最高次の係数を $\alpha_n(\neq 0)$ として，

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \quad (\neq 0)$$

に選んだとき，漸化式 (3.3) が成立することを示せ．また，B_n, C_n を決定せよ．

[14] （Legendre 多項式の構成③）

$A_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $B_n = 0$, $C_n = -\dfrac{n}{n+1}$ のとき，漸化式 (3.3) を用いて $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を求めよ．ただし，$P_0(x) = 1$ とする．

[15] （Hermite 多項式の構成③）

$A_n = 2$, $B_n = 0$, $C_n = -2n$ のとき，漸化式 (3.3) を用いて $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ を求めよ．ただし，$H_0(x) = 1$ とする．

[16] （Laguerre 多項式の構成③）

$A_n = -\dfrac{1}{n+1}$, $B_n = 2 + \dfrac{\alpha - 1}{n+1}$, $C_n = -1 - \dfrac{\alpha - 1}{n+1}$ のとき，漸化式 (3.3) を用いて $L_1^{(\alpha)}(x)$, $L_2^{(\alpha)}(x)$, $L_3^{(\alpha)}(x)$ を求めよ．ただし，$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ とする．

[17] （Jacobi 多項式の構成③）

$$A_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)} \ ,$$
$$B_n = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{2(n+1)(2n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)} \ ,$$
$$C_n = -\frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(2n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}$$

のとき，漸化式 (3.3) を用いて $P_1^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_2^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_3^{(\alpha,\beta)}(x)$ を求めよ．ただし，$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ とする．

3.4　直交多項式が満たす微分方程式

3.4.1　Rodrigues の公式

我々は，直交多項式系を構成する方法を，既に幾つか知っている．ここでは，直交多項式の直接的な表示を導こう．この表示は **Rodrigues** の公式と呼ばれ，直交多項式のさまざまな性質を調べるのに便利である．

Rodrigues の公式は，一般に，

$$p_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[w(x)F(x)^n\right] \tag{3.4}$$

という型をしている．ここで，c_n は適当な定数，$w(x)$ は重み関数である．従って，ある直交多項式系に対する Rodrigues の公式を導くことは，式 (3.4) 中の関数 $F(x)$ を見出すことに言い換えられる．$F(x)$ を見出すには，例えば，次のように考えれば良い：

$p_n(x)$ を n 次の直交多項式，$q_{n-1}(x)$ を任意の高々 $(n-1)$ 次の多項式とする．$q_{n-1}(x)$ は，$p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ の線型結合で書き表すことができるので，直交関係 (3.2) により，

$$\int_a^b p_n(x)q_{n-1}(x)\, w(x)dx = 0$$

となる．式 (3.4) をこの積分に代入し（$V_n(x) = c_n w(x)F(x)^n$ と書く），部分積分を繰り返すと，

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b q_{n-1}(x)\frac{d^n V_n(x)}{dx^n}\,dx \\
&= \left[q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}V_n(x)}{dx^{n-1}}\right]_a^b - \int_a^b \frac{dq_{n-1}(x)}{dx}\frac{d^{n-1}V_n(x)}{dx^{n-1}}\,dx \\
&= \cdots \\
&= \left[q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}V_n(x)}{dx^{n-1}} - \frac{dq_{n-1}(x)}{dx}\frac{d^{n-2}V_n(x)}{dx^{n-2}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}q_{n-1}(x)}{dx^{n-1}}V_n(x)\right]_a^b \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n-1}\int_a^b \frac{d^{n-1}q_{n-1}(x)}{dx^{n-1}}V_n(x)\,dx \\
&= \left[q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}V_n(x)}{dx^{n-1}} - \frac{dq_{n-1}(x)}{dx}\frac{d^{n-2}V_n(x)}{dx^{n-2}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}q_{n-1}(x)}{dx^{n-1}}V_n(x)\right]_a^b .
\end{aligned}$$

$q_{n-1}(x)$ は任意の多項式であり，上式が成立するためには，$x = a, b$ において

$$V_n(x) = \frac{dV_n(x)}{dx} = \frac{d^2V_n(x)}{dx^2} = \cdots = \frac{d^{n-1}V_n(x)}{dx^{n-1}} = 0 \tag{3.5}$$

であればよい．他方，$p_n(x)$ は n 次の多項式なので，

$$\frac{d^{n+1}p_n(x)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\frac{1}{w(x)}\frac{d^nV_n(x)}{dx^n}\right] = 0 \tag{3.6}$$

でなければならない．これら 2 条件 (3.5), (3.6) を満足するような $V_n(x)$（または $F(x)$）を捜すことで，Rodrigues の公式を導くことができる．

[18] （Legendre 多項式に対する Rodrigues の公式の導出）

区間 $[-1,1]$，重み関数 $w(x)=1$ の場合に $F(x)$ を決定し，Legendre 多項式 $\{P_n(x)\}$ に対する Rodrigues の公式を導け．なお，c_n は $P_n(1)=1$ により定めることとする．

答：$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$

[19] （Legendre 多項式に対する Rodrigues の公式）

問題 [18] で求めた Rodrigues の公式から，Legendre 多項式 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を具体的に書き下せ．

[20] （Hermite 多項式に対する Rodrigues の公式の導出）

区間 $(-\infty,\infty)$，重み関数 $w(x)=e^{-x^2}$ の場合に $F(x)$ を決定し，Hermite 多項式 $\{H_n(x)\}$ に対する Rodrigues の公式を導け．なお，c_n は $h_n=2^n n!\sqrt{\pi}$ により定めることとする．

答：$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$

[21] （Hermite 多項式に対する Rodrigues の公式）

問題 [20] で求めた Rodrigues の公式から，Hermite 多項式 $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ を具体的に書き下せ．

[22] （Laguerre 多項式に対する Rodrigues の公式の導出）

区間 $[0,\infty)$，重み関数 $w(x)=x^\alpha e^{-x}$ の場合に $F(x)$ を決定し，Laguerre 多項式 $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ に対する Rodrigues の公式を導け．

答：$L_n^{(\alpha)}(x)=\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{e^{-x}x^\alpha}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}).$

[23] （Laguerre 多項式に対する Rodrigues の公式）

問題 [22] で求めた Rodrigues の公式から，Laguerre 多項式 $L_0^{(\alpha)}(x)$, $L_1^{(\alpha)}(x)$, $L_2^{(\alpha)}(x)$, $L_3^{(\alpha)}(x)$ を具体的に書き下せ．

[24] （Jacobi 多項式に対する Rodrigues の公式の導出）

区間 $[-1,1]$，重み関数 $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ の場合に $F(x)$ を決定し，Jacobi 多項式 $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ に対する Rodrigues の公式を導け．

答：$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\dfrac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right].$

[25] （Jacobi 多項式に対する Rodrigues の公式）

問題 [24] で求めた Rodrigues の公式から，Jacobi 多項式 $P_0^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_1^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_2^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_3^{(\alpha,\beta)}(x)$ を具体的に書き下せ．

3.4.2 直交多項式が満たす微分方程式

Rodrigues の公式を用いると，直交多項式が満たす微分方程式を導くことができる（通常のやり方では，微分方程式の解として直交多項式を導入することが多いが，本稿ではその逆を行う）.

Rodrigues の公式で与えられる直交多項式は，次の 2 階線型常微分方程式を満たす：

$$F(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\frac{p_1(x)}{c_1}\frac{du(x)}{dx}+\lambda_n u(x)=0\ ,\quad \lambda_n=-n\left[\frac{p_1'(x)}{c_1}+\frac{n-1}{2}F''(x)\right]\ . \tag{3.7}$$

ここで，$F(x)$ は x について高々 2 次の多項式なので，λ_n は定数である.

[26] （直交多項式が満たす微分方程式）

Rodrigues の公式 (3.4) で与えられる直交多項式 $p_n(x)$ が，式 (3.7) の微分方程式を満たしていることを確かめよ.

[27] （直交多項式が満たす微分方程式の導出）

Rodrigues の公式 (3.4) から，微分方程式 (3.7) を導け.

[28] （Legendre 直交多項式が満たす微分方程式）

Legendre 多項式 $P_n(x)$ が満たす微分方程式を書き下せ.

答：$(1-x^2)u''(x)+n(n+1)u(x)=0.$

[29] （Hermite 直交多項式が満たす微分方程式）

Hermite 多項式 $H_n(x)$ が満たす微分方程式を書き下せ.

答：$u''(x)-2xu'(x)+2nu(x)=0.$

[30] （Laguerre 直交多項式が満たす微分方程式）

Laguerre 多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ が満たす微分方程式を書き下せ.

答：$xu''(x)+(\alpha+1-x)u'(x)+nu(x)=0.$

[31] （Jacobi 直交多項式が満たす微分方程式）

Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ が満たす微分方程式を書き下せ.

答：$(1-x^2)u''(x)-[\beta-\alpha(\alpha+\beta+2)x]u'(x)+n(n+\alpha+\beta+1)u(x)=0.$

3.4.3 Sturm–Liouville の固有値問題

微分方程式 (3.7) は，

$$-\frac{d}{dx}\left[w(x)F(x)\frac{du(x)}{dx}\right]=\lambda_n w(x)u(x) \tag{3.8}$$

と変形することができる．一般に，

$$-\frac{d}{dx}\left[Q(x)\frac{du(x)}{dx}\right]+R(x)u(x)=\lambda w(x)u(x) \tag{3.9}$$

の型で書かれる方程式を **Sturm–Liouville の微分方程式**といい，適当な境界条件の下で非自明な解 $u(x)\neq 0$ が存在するような λ（と $u(x)$ の組）を見出す問題を **Sturm–Liouville の固有値問題**という.

行列の固有値問題 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ との間には，以下の対応関係がある：

$$
\begin{array}{cccl}
\text{行列の固有値問題} & & \longleftrightarrow & \textbf{Sturm–Liouville の固有値問題} \\
\text{（演算子）} & A & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{w(x)}\left\{-\dfrac{d}{dx}\left[Q(x)\dfrac{d}{dx}\right]+R(x)\right\} \\
\text{（固有ベクトル）} & \vec{x} & \longleftrightarrow & u(x)\ .
\end{array}
$$

[32] （直交多項式が満たす微分方程式と Sturm–Liouville の微分方程式）

式 (3.7) の微分方程式が，式 (3.8) に変形できることを確認せよ．

3.5 直交多項式の零点

直交多項式 $p_n(x)$ の零点とは，

$$p_n(x) = 0 \tag{3.10}$$

を満たす x のことをいう．直交多項式（に限らず，振動する関数）の零点を調べることは，応用上，重要な問題である．

零点を求める最も直接的な方法は，n 次の代数方程式 (3.10) を解くことである．ここでは，行列の固有値問題を使って直交多項式 $p_n(x)$ の零点を求める方法を紹介しよう．

直交多項式が満たす漸化式 (3.3) を変形すると，

$$-\frac{1}{A_n}p_{n+1}(x) + \frac{B_n}{A_n}p_n(x) + \frac{C_n}{A_n}p_{n-1}(x) = xp_n(x)$$

とできる．左辺の各項の各係数を書き直して，

$$\tilde{A}_n p_{n+1}(x) + \tilde{B}_n p_n(x) + \tilde{C}_n p_{n-1}(x) = xp_n(x)\ , \quad n \geqslant 0\ , \quad p_{-1}(x) \equiv 0\ , \tag{3.11}$$

と書くことにする．この漸化式を，行列を用いて 1 本の方程式で表すと，

$$
\tilde{A}_{n-1}p_n(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}
\tilde{B}_0 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\tilde{C}_1 & \tilde{B}_1 & \tilde{A}_1 & 0 & & & \vdots \\
0 & \tilde{C}_2 & \tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & 0 & \tilde{C}_{n-2} & \tilde{B}_{n-2} & \tilde{A}_{n-2} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \tilde{C}_{n-1} & \tilde{B}_{n-1}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{3.12}
$$

となる．ここで，

$$
\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} \tilde{B}_0 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{B}_1 & \tilde{A}_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \tilde{C}_2 & \tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \tilde{C}_{n-2} & \tilde{B}_{n-2} & \tilde{A}_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \tilde{C}_{n-1} & \tilde{B}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_n(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix}
$$

とおくと，式 (3.12) は，

$$
\tilde{A}_{n-1} p_n(x) \boldsymbol{e}_n + J_n \boldsymbol{p}_n(x) = x \boldsymbol{p}_n(x) \tag{3.13}
$$

と書ける．$p_n(x)$ の零点を x_0 とすると，$p_n(x_0) = 0$ であり，

$$
J_n \boldsymbol{p}_n(x_0) = x_0 \boldsymbol{p}_n(x_0) \tag{3.14}
$$

を得る．これは行列 J_n に対する固有値問題の型をしており，$p_n(x)$ の零点はその固有値として求められる（固有ベクトルから，$x = x_0$ での $n-1$ 次以下の直交多項式の値も分かる）．

[33] （Legendre 直交多項式の零点）

$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を求め，それらが 2 次方程式 $P_2(x) = 0$ の解と一致していることを確かめよ．

[34] （Hermite 直交多項式の零点）

$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を求め，それらが 2 次方程式 $H_2(x) = 0$ の解と一致していることを確かめよ．

[35] （Laguerre 直交多項式の零点）

$J_2 = \begin{pmatrix} -\alpha - 1 & 1 \\ \alpha + 1 & -\alpha - 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求め，それらが 2 次方程式 $L_2^{(\alpha)}(x) = 0$ の解と一致していることを確かめよ．

[36] （Jacobi 直交多項式の零点）

$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2} & -\frac{2}{\alpha+\beta+2} \\ -\frac{2(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} & \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)} \end{pmatrix}$ の固有値を求め，それらが 2 次方程式 $P_2^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ の解と一致していることを確かめよ．

3.6　展開：おわりに

本稿は，あくまで，線型代数の知識との接続を意識した内容で，直交多項式論の入門的な範囲に留めてあります．このノートの先に続く内容として，展開は様々考えられますが，皆さんは工学の学生なので，まずは次のことを考えてみるとよいでしょう：

[37]　（直交多項式の応用）

自分の専門分野やその周辺分野で，直交多項式が応用されている例または Sturm–Liouville の固有値問題が現れる例を教えてください（簡単な説明も付けてください）．

数学としては，以下のような展開が考えられます：

- 本稿で扱っていない 1 変数の直交多項式にはどのようなものがあり，どのように構成されるだろうか？
  （キーワード：Beesel 多項式，Askey–Wilson 多項式，Askey スキーム，例外直交多項式，多添字直交多項式）
- 多変数の直交多項式にはどのようなものがあり，どのように構成されるだろうか？
  （キーワード：Jack 多項式，Macdonald 多項式）
- 直交多項式の性質として，本稿で扱ったもの以外にはどのようなものがあるだろうか？
  （キーワード：漸近展開）
- 本稿で扱った直交多項式の理論を，別の視点で再構成することはできないだろうか？
  （キーワード：解ける量子力学，超対称量子力学）
- 多項式以外の直交関数系について …… *etc.*

参考文献

【線型代数】

[1] 齋藤正彦，基礎数学 1　線型代数入門，東京大学出版会 (1966).

[2] 佐武一郎，数学選書 1　線型代数学（新装版），裳華房 (2015).

[3] Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 5th Edition, Wellesley - Cambridge Press (2016).

[4] 村上正康ら，教養の線形代数 五訂版，培風館 (2008).

[5] 長谷川浩司，線型代数—Linear Algebra［改訂版］，日本評論社 (2015).

【直交多項式・特殊関数】

[6] 犬井鉄郎，岩波全書 252　特殊函数，岩波書店 (1962).

[7] 伏見康治ら，復刊　直交関数系 増補版，共立出版 (2011).

[8] 青本和彦，直交多項式入門，数学書房 (2013).

【量子力学と直交多項式】

[9] 佐々木隆，SGC ライブラリ 122　可解な量子力学系の数理物理 直交多項式の生み出す多様な展開，サイエンス社 (2016).