0　オリエンテーション

みなさん，こんにちは．今年度，「数学 AI」の講義を担当する奈須田です．

居室：管理棟・一般教科棟 3 階 305 号室（奈須田教員室）　メール：y.nasuda@gunma-ct.ac.jp
個人 Web サイト：https://yuta-nasuda.github.io ☞

0.1　この授業について（※シラバスを参照）

概要　この授業（と後期の「数学 AII」）では，数学の主要な分野の一つである解析学のうち，微分積分学 (calculus) を 1 変数関数の範囲に限って講義する．前期には微分法とその応用を，後期には積分法とその応用を扱う．微分積分学は，線型代数学とともに，自然科学・工学の専門的な内容を学ぶための基礎となる数学である．

教科書・参考書

[1] 高遠節夫ら，新微分積分 I 改訂版，大日本図書 (2021).

[2] 高遠節夫ら，新微分積分 I 問題集 改訂版，大日本図書 (2021).

【大学生向け】

[3] 高木貞治，解析概論 改訂第三版 軽装版，岩波書店 (1983).

[4] 杉浦光夫，基礎数学 2 解析入門 I，東京大学出版会 (1980).

[5] 小平邦彦，［軽装版］解析入門 I，岩波書店 (2003).

[6] 黒田成俊，共立講座 21 世紀の数学 第 1 巻 微分積分，共立出版 (2002).

[7] James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th Edition, Thomson (2008).

[8] 森毅，現代の古典解析 微積分基礎課程，ちくま学芸文庫 (2006).

【高校生向け】

[9] 清史弘，新数学 Plus Elite 数学 I・A ／数学 II・B ／数学 III，駿台文庫 (2016, 2017, 2019).

[10] 宮腰忠，高校数学＋α：基礎と論理の物語，共立出版 (2004).

授業の進め方　授業は，板書を中心とした講義形式で行う．ノートをとって復習できるようにしておくこと（配布するプリントは，あくまで授業の補足のためである）．授業内で，適宜，演習の時間も設ける．

予習・復習　予習の必要はない（教科書を読んでおくと授業の理解度が上がるかもしれない）．また復習に関しては，課題や問題集を解くなど演習を積んで講義内容の理解を深めること．何も見ずに教科書や授業の流れを再現する，というのも良い復習の方法である．

課題の提出：　授業後から次の授業前日の 23:59 までに，Teams のクラス内へ．

質問　質問は，随時受け付けています．直接居室に来るか，MS Teams のチャット機能を使う（返信の目安：遅くとも 24 時間以内）など，各自の状況・都合に合わせた方法を選んでください．

0.2　概観

微分積分学（解析学）は，他の数学の分野とは違い，静的ではなく動的 (dynamic) である．つまり，微分積分学は物体の運動（速度の変化）や人口の増減など，量の変化を調べる数学の一分野であるといえる．

- 関数の極限：　関数の振る舞い（どのように変化するか；behavior）を調べる道具立て．
- 微分法：　変化を追う → 接線を引く．
- 積分法：　変化を積み上げる → 面積を求める．

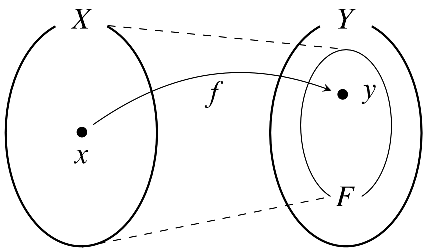
0.3　いろいろな関数

◪　関数とは

定義（関数）．空でない数の集合 X, Y があって，X の任意の要素 x に対して，対応する $y \in Y$ がただ 1 つだけ存在するとき，この対応関係を集合 X から Y への関数（函数；function）と呼び，

$$f : X \to Y \qquad や \qquad y = f(x)$$

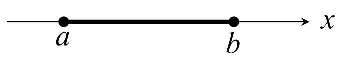
などと表す．また，このとき，X を定義域 (domain)，$y = f(x)$ と書ける y の集合 F を値域 (range) と呼ぶ．



※ 区間 (interval) I．　2 つの実数 a, b $(a < b)$ について，

$(a, b) := \{x | a < x < b\}$　：開区間，

$[a, b] := \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$　：閉区間．



ほかにも，$(a, b]$ や $[a, b)$ もある．また，“無限に延びた”区間：

$$(a, \infty) = \{x | x > a\}, \qquad (-\infty, b) = \{x | x < b\},$$
$$[a, \infty) = \{x | x \geqslant a\}, \qquad (-\infty, b] = \{x | x \leqslant b\}$$

も考える．さらに，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

とも書ける．

なお，区間 I 内の実数 x を点 x と呼ぶことがある．

◪ 関数の表し方

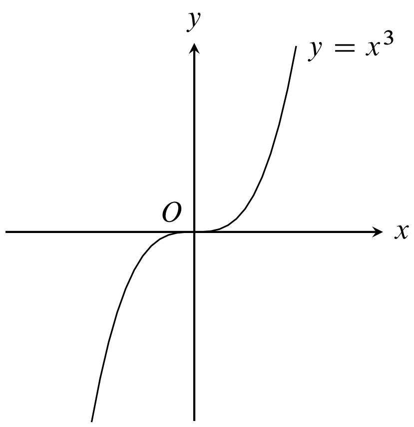
A. 式で書く，　B. グラフにする，　C. 表にまとめる，　D. 言葉で説明する，...

◪ 初等関数

これまでに，以下のような関数を学んできた：

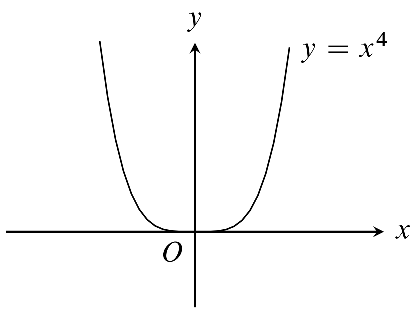
- 冪関数　$f(x) = x^n$.

n が奇数のとき



奇関数 $(f(-x) = -f(x))$ であり，グラフは原点対称.

n が偶数のとき

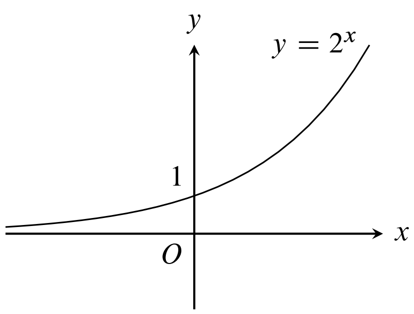


偶関数 $(f(-x) = f(x))$ であり，グラフは y 軸対称.

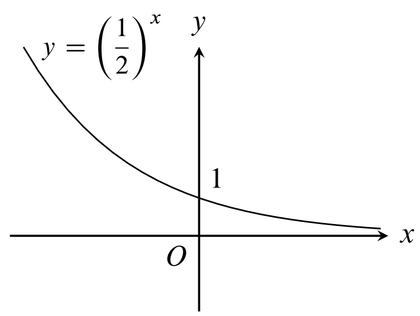
※　$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $(x \geqslant 0)$, $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ $(x \neq 0)$ などである.

- 指数関数　$f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

$a > 1$ のとき

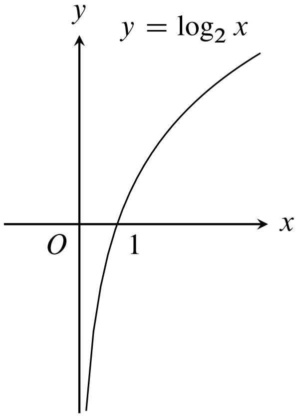


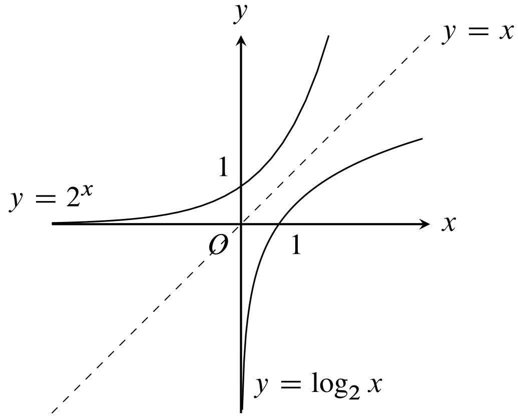
$0 < a < 1$ のとき



※ 指数法則：　$a^p a^q = a^{p+q}$,　$(a^p)^q = a^{pq}$,　$(ab)^p = a^p b^p$.

- 対数関数　$f(x) = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$.

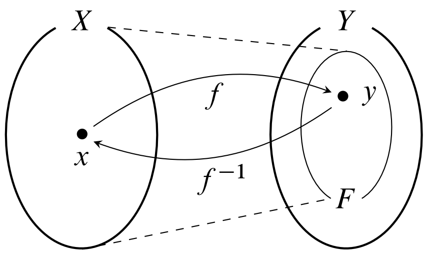




対数関数 $y = \log_a x$ は，指数関数 $y = a^x$ の逆関数である：

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y .$$

※ 逆関数　集合 X から Y への関数 $y = f(x)$ が，Y の任意の要素 y に対しても $y = f(x)$ となる $x \in X$ がただ 1 つだけ存在するとき，$y \in Y$ に $x \in X$ を対応させる関数を f の逆関数 (inverse function) と呼び，f^{-1} などと表す.



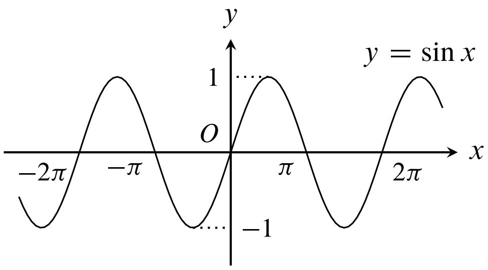
※　$\log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$，$\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$，$\log_a x^p = p \log_a x$,
$\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$（対数関数の底の変換）.

※ 指数関数の底の変換：　$a^p = \left(b^{\log_b a}\right)^p = b^{p \log_b a}$.

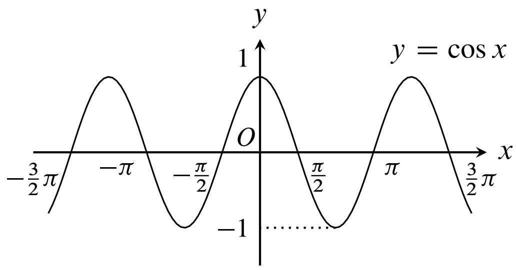
問題 0.1　2 は 3 の何乗か？

- 三角関数

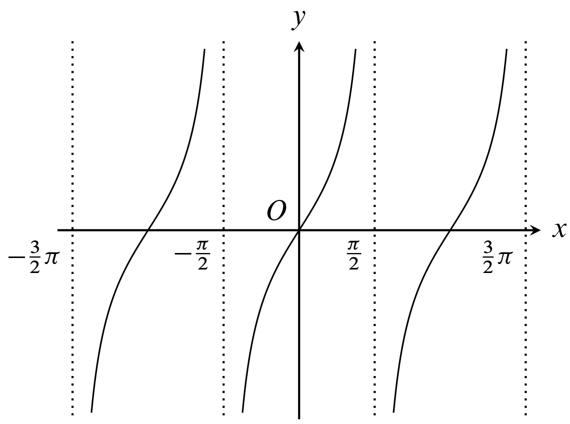
$\underline{f(x) = \sin x}$ （周期 2π，奇関数）



$\underline{f(x) = \cos x}$ （周期 2π，偶関数）



$\underline{f(x) = \tan x}$ （周期 π，奇関数）



ほかにも，

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{［セカント］,}$$
$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{［コセカント］,}$$
$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \text{［コタンジェント］}$$

を用いることもある．

以上に加えて，今後，

- 逆三角関数　$f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctan x$ など
- 双曲線関数　$f(x) = \sinh x$, $f(x) = \cosh x$, $f(x) = \tanh x$ などとその逆関数（逆双曲線関数）

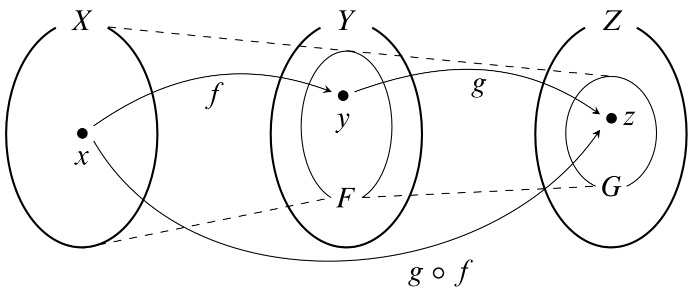
なども学習する．

さらに，これらの関数を（有限回）“合成”して得られる関数も考える：

- $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ （定義域に注意）.

- 合成関数

  定義（合成関数）**.** 集合 X から Y への関数 $y=f(x)$ と Y から Z への関数 $z=g(y)$ が与えられたとき，x に z を対応させる関数 $z=g(f(x))$ を関数 f と g の合成関数 (composite function) と呼び，$g\circ f$ などと書く.



  例 1. $f(x)=x^2+1, g(y)=\sqrt{y}$ のとき，$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+1}$.

  例 2. $y=f(u)=u^5, u=g(x)=ax+b$ のとき，$y=f(ax+b)=(ax+b)^5$.

- 平行移動，スケール変換，対称移動，回転移動.

  <u>問題 0.2</u> $y=2x^2-4x+5$ のグラフは $y=2x^2$ のグラフをどのように平行移動したものか？

cf. 特殊関数，関数 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ は有理数})\\ 0 & (x\text{ は無理数})\end{cases}$，…

◪ 確認テスト（点数は成績に影響しません；念のため）

I.　次の式を展開せよ．

(1) $(x+5)^3$　(2) $(x+4)(x^2-4x+16)$　(3) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(4) $(x+y)^5$　(5) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

II.　計算せよ．

(1) 3^4　(2) $(-3)^4$　(3) -3^4　(4) 3^{-4}

(5) $\sqrt[4]{16}$　(6) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$　(7) $49^{\frac{1}{2}}$　(8) $8^{\frac{4}{3}}$

(9) 2^0　(10) $2^2 \cdot 2^3$　(11) $(2^2)^3$　(12) 2^{10}

III.　計算せよ．

(1) $\log_3 27$　(2) $\log_4 8$　(3) $\log_2 1$　(4) $\log_{10} 10000$

(5) $\log_3 \dfrac{1}{81}$　(6) $\log_{\sqrt{2}} 8$　(7) $\log_2 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8$

IV.　次の値を求めよ（(8) は式を簡単にせよ）．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{6}$　(2) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　(3) $\sin\dfrac{5}{6}\pi$　(4) $\sin\dfrac{7}{6}\pi$

(5) $\sin\dfrac{\pi}{12}$　(6) $\cos\dfrac{\pi}{12}$　(7) $\tan\dfrac{\pi}{12}$　(8) $1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}$

V.

1 次関数 $y = ax + b$ において，a, b はそれぞれグラフの傾きと y 切片を表す．では，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において，a, b, c はそれぞれ何を表すか？ また，$a+b+c, a-b+c, b^2-4ac$ はそれぞれ何を表すか？

問　微分法の知識は仮定せずに，$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ のグラフの $x = t$ における接線の方程式を求めよ．

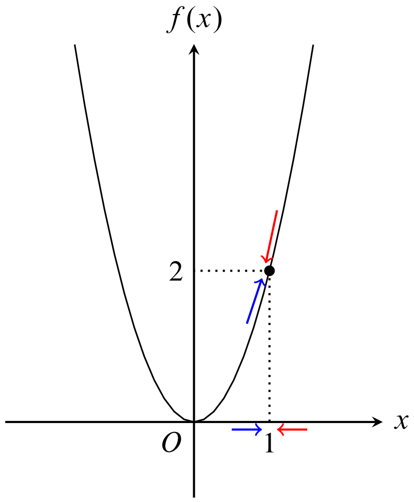
1　関数の極限

cf.　数列の極限

1.1　極限とは

◪　極限のイメージ

例 1.　$f(x) = 2x^2$

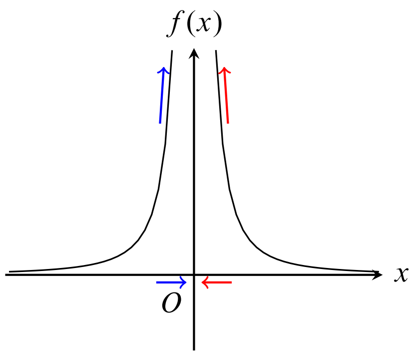


x が，1 とは異なる値をとりながら，
1 に限りなく近づいていく（近づき方は自由）．

$\downarrow$

$f(x)$ の値は，2 に限りなく近づいていく．

例 2.　$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

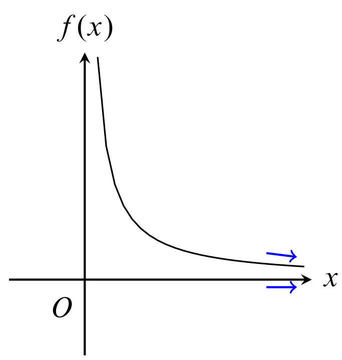


x が，0 とは異なる値をとりながら，
0 に限りなく近づいていく（近づき方は自由）．

$\downarrow$

$f(x)$ の値は，限りなく大きくなっていく．

例 3.　$f(x) = \dfrac{1}{x}$



x の値が，限りなく大きくなっていく．

$\downarrow$

$f(x)$ の値は，0 に限りなく近づいていく．

◪ 定義（2 年生向け）

cf. ε-δ 論法

定義（関数の極限）． 関数 $f(x)$ において，x が定数 a とは異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，その近づき方によらず，$f(x)$ の値が一定値 α に限りなく近づくならば，x が a に近づくとき $f(x)$ は α に収束するといい，α を極限値という．これを，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \quad (x \to a)$$

などと表す．

また，$x \to a$ のとき，関数 $f(x)$ の値が（負でその絶対値が）限りなく大きくなるならば，$x \to a$ のとき $f(x)$ は正（負）の無限大に発散する，あるいは $f(x)$ の極限は $\pm\infty$ であるといい，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \pm\infty \quad (x \to a)$$

と表す．

同様にして，$x \to \pm\infty$ のときの極限も考える．

問題 1.1　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} x^4$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1} 3^x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$

定義（片側極限）． 関数 $f(x)$ において，x が定数 a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくときの極限を

$$\lim_{x \to a+0} f(x)\,, \quad \lim_{x \to a^+} f(x)\,, \quad \lim_{x \searrow a} f(x)\,,$$

などと表し，右側極限と呼ぶ．同様に，x が定数 a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくときの極限は

$$\lim_{x \to a-0} f(x)\,, \quad \lim_{x \to a^-} f(x)\,, \quad \lim_{x \nearrow a} f(x)\,,$$

などと表され，左側極限と呼ばれる．特に $a = 0$ のとき，$x \to 0 \pm 0$ は $x \to \pm 0$ と略記される．

次の定理も重要である：

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = \alpha\,.$$

なお，極限 $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ が存在しなくても，2 つの片側極限が存在する場合もある．

◪ 性質

関数 $f(x), g(x)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to a} g(x)$ が存在するとき，次の性質が成り立つ：

(i) $\displaystyle\lim_{x \to a} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$　（複合同順）

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$　（c は定数）

(i), (ii)：線型性

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to a} \big[f(x)g(x)\big] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x \to a} g(x)}$　（$g(x) \neq 0, \displaystyle\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$）

1.2　極限の計算

【例題 1.1】

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 2}4$

✍

<u>問題 1.2</u>　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+5x}{5x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+3x+2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^4-1}{x+1}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{2x+1}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2+3x+1}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

関数の極限について，さらに次のことが成り立つ：

定理（関数の極限と大小関係）．関数 $f(x), g(x)$ について，$x=a$ の近くで $f(x)\leqslant g(x)$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x), \lim_{x\to a}g(x)$ が存在すれば，

$$\lim_{x\to a}f(x)\leqslant\lim_{x\to a}g(x)\,.$$

さらに，$x=a$ の近くで $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ であり，かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$ ならば，

$$\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$$

である（はさみうちの原理）．

また，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ のとき，十分大きい x で $f(x)\leqslant g(x)$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ である．

1.3 さまざまな関数の極限

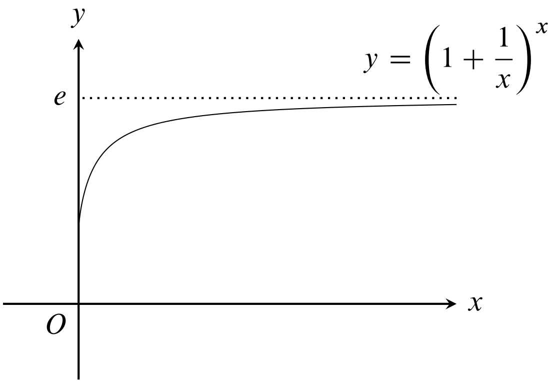
◪ 冪関数の極限

- $n > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = \infty.$
  $n = 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = 1.$
  $n < 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = 0.$

◪ 指数関数，対数関数がらみの極限

- $a > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$．
  $0 < a < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$．

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ （Napier（ネイピア）数の定義）



極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ は収束し，その極限値は

$$e = 2.718281828459\cdots \quad \text{（無理数）}$$

であることが知られている．

問 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が収束することを示せ．

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$，$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

※ $\log_e x$ を $\ln x$ と書く．

問 これらの公式を示せ．

問題 1.3 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to0}(1-2h)^{\frac{1}{h}}$

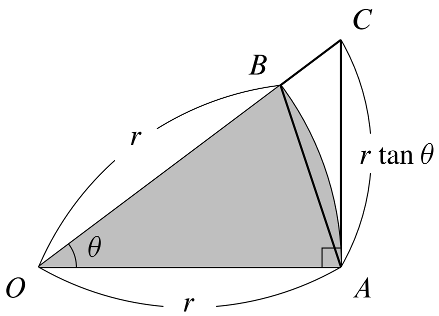
◪ 三角関数がらみの極限

- $\theta \to \infty$ のとき，$\sin\theta, \cos\theta$ の極限は存在しない．
  また，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \tan\theta = \infty$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} \tan\theta = -\infty$ であり，$\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ のときの $\tan\theta$ の極限も存在しない．

- $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

  ∵) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ として，右図のように O を中心として，半径が r，中心角が θ の扇形 OAB を考える．直線 OA の点 A を通る垂線と直線 OB との交点を C として，$\triangle OAB$, 扇形 OAB, $\triangle OAC$ の面積について，以下の不等式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}r^2\sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2\tan\theta \\
\iff\ & \sin\theta < \theta < \tan\theta \\
\iff\ & 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \\
\iff\ & \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1\,.
\end{aligned}
$$



  この不等式は，$\theta \to -\theta$ としても成り立つ．よって，

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta \leqslant \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \leqslant 1\,.$$

  ここで $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を得る． ■

- $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

問　これらの公式を示せ．

【例題 1.2】

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}$

✍

問題 1.4　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{3\theta}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin 2\theta}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$

◪ 発散速度

定義（高位の無限大）. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ であり，かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

のとき，$g(x) \ll f(x)$, $g(x) = o(f(x))$ などと書き，（$x = a$ において）$f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限大であるという.

$x \to \infty$ において，

$$\cdots \ll \log_3 x \ll \ln x \ll \log_2 x \ll \cdots \ll \sqrt{x} \ll x \ll x^2 \ll x^3 \ll \cdots$$
$$\ll 2^x \ll e^x \ll 3^x \ll \cdots (\ll x! \cdots) \ll x^x \ll \cdots$$

である.

問　次の関係式を示せ．ただし，$a > 1$, $p > 0$ とし，n は正の整数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^p} = 0$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

$$\log_a x \ll x^p \ll a^x \ll x! \ll x^x$$

2　微分法

2.0　変化量の表し方

量 X が X_1 から X_2 まで変化したとすると，その変化分（増分）ΔX は，

$$\Delta X = X_2 - X_1 \quad\Longleftrightarrow\quad X_2 = X_1 + \Delta X$$

と表される（$\overset{\text{デルタ}}{\Delta}$ は difference（差）の頭文字 D に対応するギリシャ文字で，「ΔX」で 1 つの記号）．

特に，変数 x の値が x_1 から x_2 まで変化するとき，これに伴って変数 y の値が $y_1 = f(x_1)$ から $y_2 = f(x_2)$ まで変化するとする．このとき，y の増分と x の増分の比：

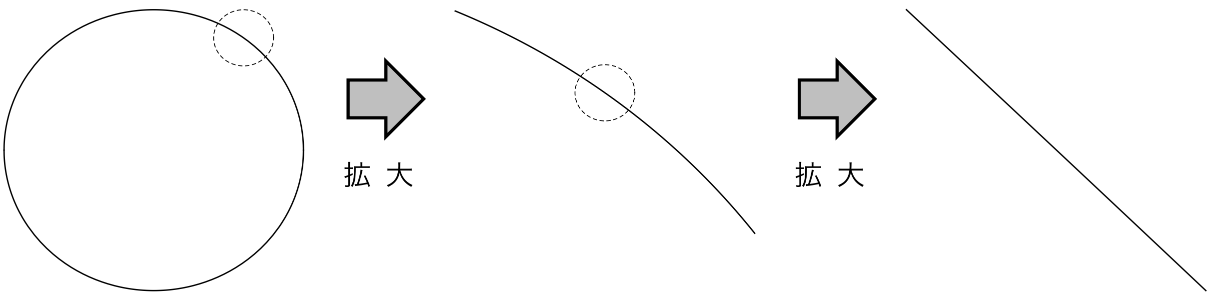
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

を $y = f(x)$ の x_1 から x_2 までの平均変化率という（例：平均の速さ）．

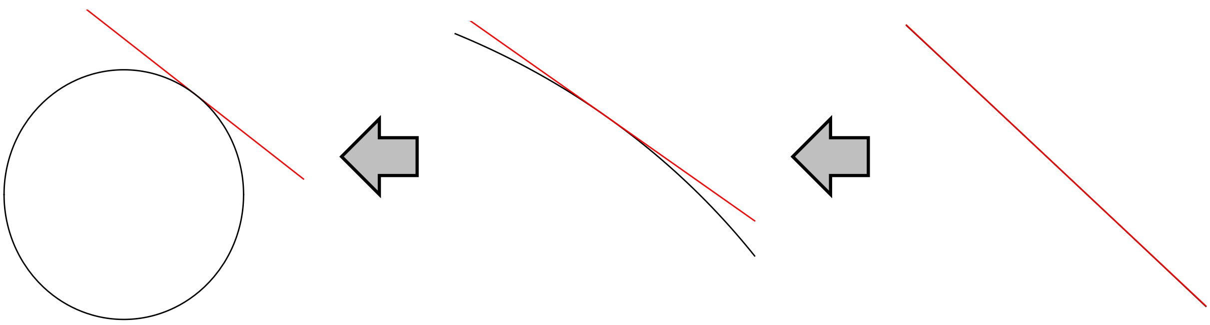
2.1　微分法の考え

◪　「微分する」とは？（イメージ）

どんな曲線であれ，十分滑らかであれば，ある部分をどんどん拡大していくと“直線”が見えてくる：

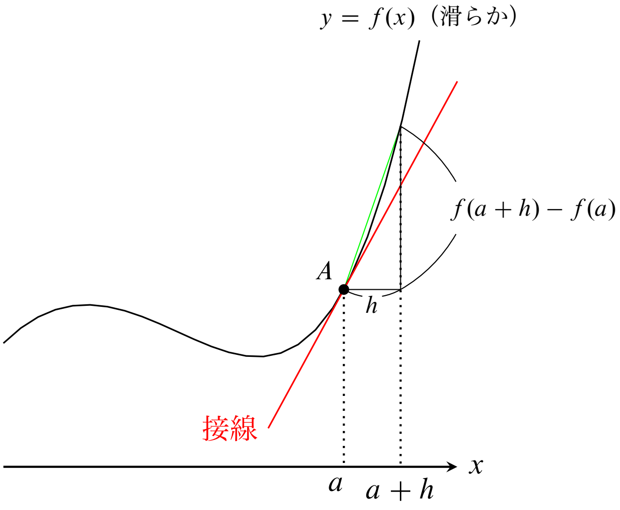


この直線に赤い色をつけて，元の縮尺に戻してやると，この赤い直線はその曲線の（拡大した部分における）接線であることが分かる：



★　以上の考えを，数学的に定式化するためには，どうしたら良いだろうか？

◪ 微分係数



平均変化率：

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

について，$h \to 0$ としたときの極限値が存在するとき，これを $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい，$f'(a)$ などと書く：

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

また，$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという．

※　微分係数と接線の傾き

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A\,(a, f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい．従って，接線の方程式は，

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = f'(a)\,x + f(a) - af'(a)$$

と書ける．

【例題 2.1 (a)】

関数 $y = x^3$ の $x = 2$ における微分係数を求めよ．

✍

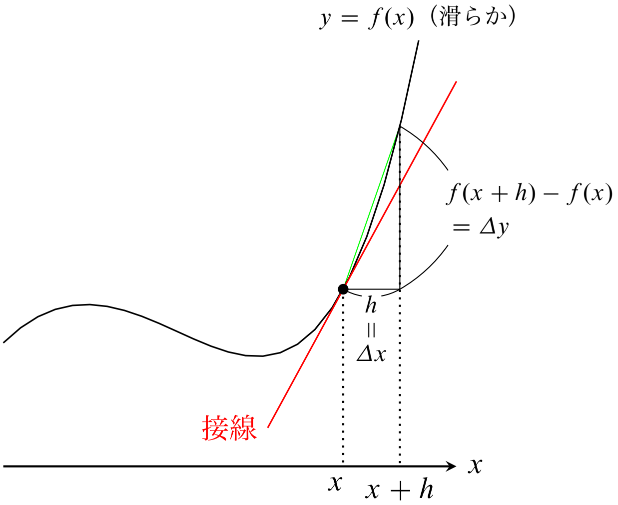
問題 2.1　次の値を求めよ．

(1) 関数 $y = x^2$ の $x = 1$ から 3 までの平均変化率と，$x = 1$ 及び $x = 3$ における微分係数．

(2) 関数 $y = x^2$ の $x = a$ から $b\ (\neq a)$ までの平均変化率と，$x = a$ における微分係数．

問題 2.2　曲線 $y = x^2$ 上の点 $(2, 4)$ における接線の方程式を求めよ．

◪ 導関数



ある区間内のすべての点において関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，関数 $f(x)$ はその区間で微分可能であるという．

このとき，区間内の x の値に関数 $f(x)$ の微分係数を対応させる関数を $f(x)$ の導関数 (derivative) といい，$f'(x)$ などと表す：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'\,. \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を（x で）微分する (differentiate) という．

【例題 2.1 (b)】

関数 $y=x^3$ の導関数を求めよ．

✍

問題 2.3　導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ．

(1)　$y=3x^2$　　　(2)　$y=-x^2$

2.2　いろいろな関数の導関数 ①

◪ 定数関数　$f(x)=c$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0 \qquad \therefore\ (c)'=0\,.$$

◪ 冪関数　$f(x)=x^n$（n は正の整数）

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)=nx^{n-1} \qquad \therefore\ (x^n)'=nx^{n-1}\,. \end{aligned}$$

2.3 微分法の基本法則 ①

◪ 線型性

微分可能である関数 $f(x), g(x)$ 及び定数 c について，次の性質が成り立つ：

(i) $\big[f(x) \pm g(x)\big]' = f'(x) \pm g'(x)$

(ii) $\big[cf(x)\big]' = cf'(x)$

以上をまとめると，次のように書ける（α, β は定数）：

$$\big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)\,.$$

法則 (i) の証明.

$$\begin{aligned}\big[f(x) \pm g(x)\big]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\big[f(x+h) \pm g(x+h)\big] - \big[f(x) \pm g(x)\big]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \pm g'(x) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

法則 (ii) の証明.

$$\begin{aligned}\big[cf(x)\big]' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

【例題 2.2】

関数 $y = 3x^4 - 5x + 2$ を微分せよ.

✍

問題 2.4　次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^3 + 2$　　(2) $y = x^2 + 3x$　　(3) $y = -x^3 + \sqrt{2}$

(4) $y = \dfrac{1}{3}(2x^3 + 3x)$　　(5) $y = \dfrac{x^6 + x^4}{2}$

2.3　微分法の基本法則 ①（続き）

◪　積の微分法・商の微分法

微分可能である関数 $f(x), g(x)$ について，次の性質が成り立つ：

(iii) $\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$　　$(g(x) \neq 0)$

特に，$f(x) \equiv 1$ のとき，$\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$.

法則 (iii) の証明.　✍

※　$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ が微分可能な関数であるとき，

$$\left[f_1(x)f_2(x)f_3(x)\right]' = f_1'(x)f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x)$$

である.

問　これを証明せよ.

問　一般に，微分可能な関数 $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ について，$\left[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\right]'$ はどうなるか？

法則 (iv) の証明.　✍

【例題 2.3】

次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (x+4)(x^2+2x-3)$　　　(2)　$y = \dfrac{x+3}{x-1}$

✍

問題 2.5　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (x+2)(2x-5)$　　(2)　$y = (2x-1)(2x^2-3x+1)$　　(3)　$y = (x^2+3)(x^3+2)$

(4)　$y = \dfrac{2x}{x+3}$　　(5)　$y = \dfrac{1}{x-4}$　　(6)　$y = x^2 + \dfrac{3}{x+1}$

(7)　$y = (x+2)(x-1)(x-4)$　　(8)　$y = (x^2+2)(x^2-1)(x^2-5)$

2.4 いろいろな関数の導関数 ②

◪ **冪関数** $f(x) = x^{-m}$（m は正の整数）

- $(x^{-m})' = -mx^{-m-1}$

証明. ✍

◪ **冪関数** $f(x) = x^{r}$（r は有理数）

- $(x^{r})' = rx^{r-1}$ 例： $(x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$， $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

問題 2.6 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1}{x^5}$ (2) $y = \dfrac{3}{x^4}$ (3) $y = 3x^{-2} + 2x^{-3}$ (4) $y = 3x^2 + \dfrac{1}{x^3}$

(5) $y = x^{\frac{2}{3}}$ (6) $y = \sqrt[5]{x^3}$ (7) $y = x\sqrt{x}$

問題 2.7 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ (2) $y = (x+1)\sqrt{x}$

◪ **関数** $f(ax+b)$（$a \neq 0$）

- $\big[f(ax+b)\big]' = af'(ax+b)$ $\leftarrow u = ax+b$ とおくと，$\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\dfrac{df(u)}{du} = \dfrac{du}{dx}\dfrac{df(u)}{du}$.

証明. ✍

【例題 2.4】

次の関数を微分せよ．

(1) $y = (3x+2)^5$ (2) $y = \sqrt{4x-1}$

✍

問題 2.8 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (-2x+1)^5$ (2) $y = (2x-3)^{\frac{5}{2}}$ (3) $y = \sqrt{(3x+1)^3}$ (4) $y = \dfrac{1}{(5x+1)^2}$

◪ **三角関数** $f(x) = \sin x$，$\cos x$，$\tan x$

- $(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

証明. ✍

問題2.9　次の関数を微分せよ．

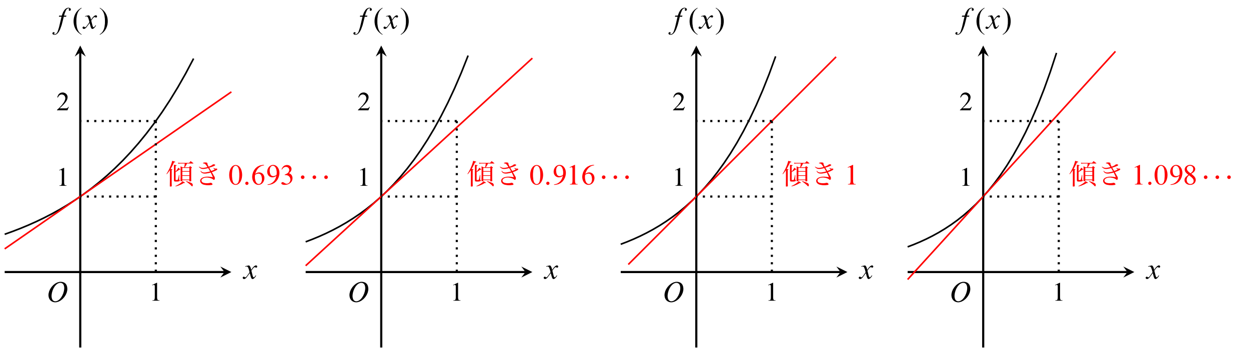
(1) $y = \sin x + \cos x$　(2) $y = \sin x \cos x$　(3) $y = \sin(3x+2)$　(4) $y = \cos(3-2x)$
(5) $y = \tan 3x$

◪ 指数関数 $f(x) = a^x$（$a > 0, a \neq 1$）

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{=?}$$

★ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となるような a の値は？　［答え：$a = e$（Napier 数）］

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ は，$y = a^x$ の $x = 0$ における微分係数であるから，いくつかの a の値に対する $y = a^x$ の点 $(0, 1)$ における接線の傾きを調べてみよう．



$a = 2$ のとき　$a = 2.5$ のとき　$a = e$ のとき　$a = 3$ のとき

このように，$a = 2.5$ から 3 の間に，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$，すなわち $y = a^x$ の点 $(0, 1)$ における接線の傾きが 1 になるような a の値が存在することが分かる．これが，Napier（ネイピア）数 $e = 2.718281828459\cdots$ のもう一つの定義である：

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\ .$$

問　この定義から $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を導け．

以上から，

$$(e^x)' = e^x\ .$$

また，$a^x = e^{x \ln a}$（底の変換）より，

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a\ .$$

問題2.10　次の関数を微分せよ．

(1) $y = e^{-2x}$　(2) $y = x^2 e^x$　(3) $y = e^x \sin x$　(4) $y = e^{2x}\cos 3x$

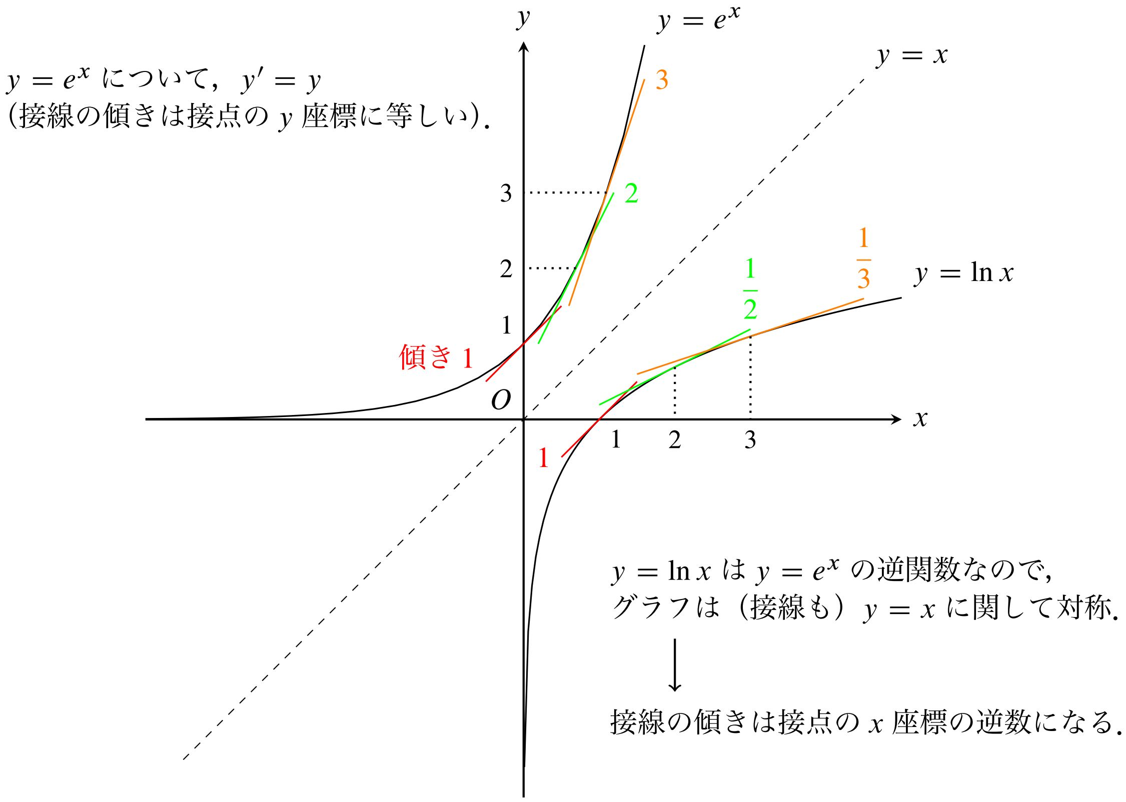
(5) $y = \dfrac{e^x}{x}$　(6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$　(7) $y = 5^x$　(8) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

◪ 対数関数　$f(x) = \log_a x$（$a > 0, a \neq 1$）

- $a = e$ のとき，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

問　これを証明せよ．

《直観的な説明》



- $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$　　$\because$ $x > 0$ のとき $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，$x < 0$ のとき $\left[\ln(-x)\right]'$ を計算．
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$（底の変換）より，

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

問題2.11　次の関数を微分せよ．

(1) $y = x\ln x$　(2) $y = \ln(3x-2)$　(3) $y = \ln(-x)$　(4) $y = \log_2 x$

(5) $y = \log_3(2x+1)$　(6) $y = \ln|2x+1|$　(7) $y = \ln|3-x|$

【例題 2.5】

$y = \ln \dfrac{(x-1)^3}{(2x+1)(x+1)^2}$ $(x > 1)$ を微分せよ．

✍

問題2.12　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \ln \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ $(x > 1)$　　(2)　$y = \ln(x^3\sqrt{x^2+1})$

問題2.13　次の値を求めよ．

(1)　$\ln e^3$　　(2)　$\ln \dfrac{1}{e^2}$　　(3)　$\ln e\sqrt{e}$

2.5 微分法再考：「微分」とは何か？

◪ 円の面積の問題を例に

【例題 2.6】

半径 r の円の面積 A は，$A=\pi r^2$ である．$\dfrac{dA}{dr}$ を求めよ．

— A は r の関数なので，A を（r で）微分して $\dfrac{dA}{dr}=2\pi r$ とするのが，「模範解答」だとは思いますが，ここでは“平均変化率の極限”という導関数の定義に戻って考えてみましょう．

✍

問 関数 $y=x^3$ の導関数を，上と同じやり方で求めよ．

✍

◪ 微分 “微小変化分”

関数 $y=f(x)$ は滑らかだとする．x, y の変化分（増分）をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ と書くのであった．

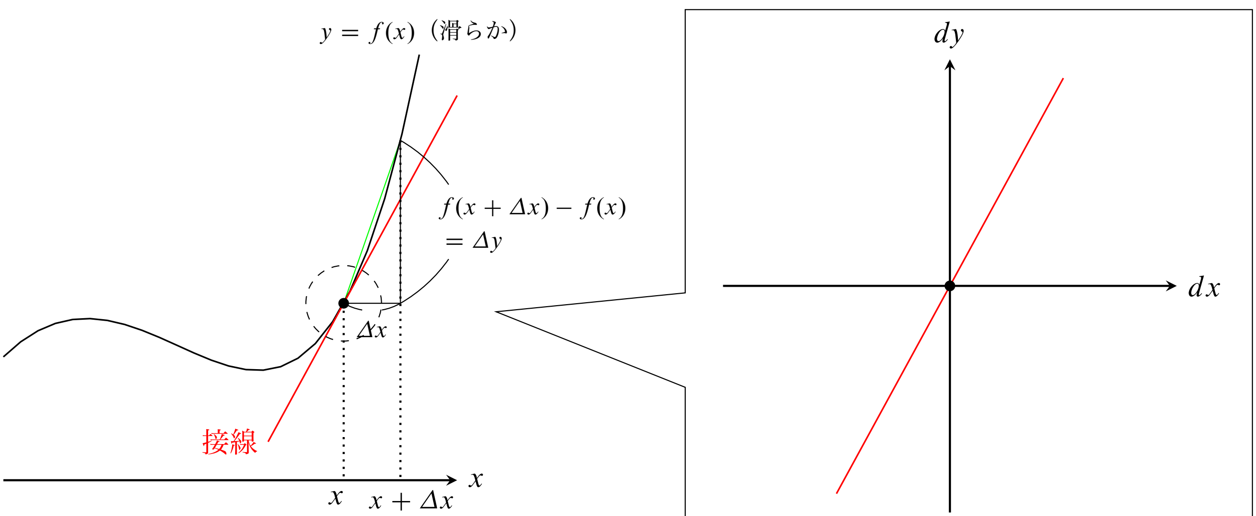
$|\Delta x|$ が十分小さいとき，

$$\Delta y \fallingdotseq [\text{接線の傾き}]\times\Delta x = f'(x)\Delta x \qquad cf.\quad \Delta y = [\text{平均変化率}]\times\Delta x\,.$$

$\Delta x\to 0$ のとき，$\Delta x, \Delta y$ を dx, dy と書き，x の微分，y の微分 (differential) という．

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=f'(x)\,.$$

$\dfrac{dy}{dx}$，あるいは $f'(x)$ を求めることを y を x で微分するという． ✍



定義（高位の無限小）． $\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ であり，かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$$

のとき，$f(x)\ll g(x)$, $f(x)=o(g(x))$ などと書き，（$x=a$ において）$f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小であるという．

導関数 $f'(x)$ の定義より，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \therefore\ \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right)=0$$
$$\Longleftrightarrow\ \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}\right)=0$$
$$\Longleftrightarrow\ \Delta y-f'(x)\Delta x=o(\Delta x)\,.$$

すなわち，$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$ であり，これを $dy=f'(x)\,dx$ と書く．

2.6 微分法の基本法則 ②

◪ 合成関数の微分法 (chain rule)

$y=f(u)$, $u=g(x)$ がいずれも微分可能な関数であるとき，

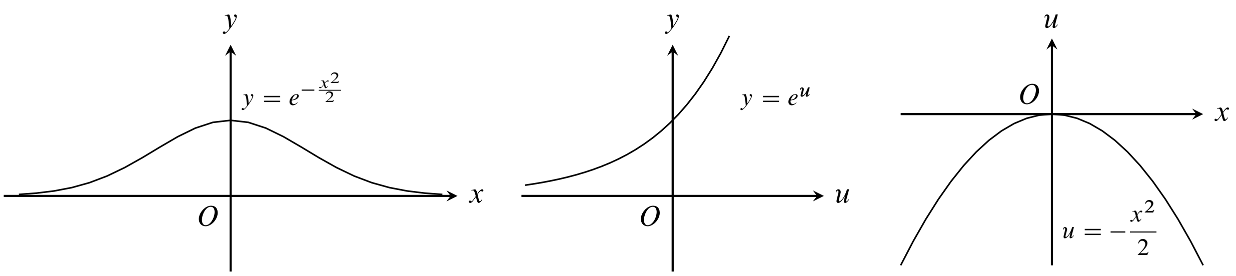
(v) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

法則 (v) の説明. ✍

cf. Y は U に比例し（比例係数は 3），U は X に比例する（比例係数は 2）とき，
Y は X に比例する（比例係数は $3\times 2=6$）．

問 これを証明せよ．

例. $y=e^{-\frac{x^2}{2}} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} y=e^u \\ u=-\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$



$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad$ $y=e^u$ $\qquad$ $u=-\dfrac{x^2}{2}$

【例題 2.7】

次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x^2 + x + 1)^8$ (2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(3) $y = \sqrt{6x + 2}$ (4) $y = \log_3(4x - 1)$

(5) $y = \sin^3 2x$ (6) $y = e^{x^2} \sin 3x$

✍

問題 2.14 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x^2 - x + 1)^5$ (2) $y = e^{\cos x}$ (3) $y = \ln(x^2 - 1)$ (4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(5) $y = \cos^2 x$ (6) $y = \tan^2 x$

問題 2.15 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos^3 2x$ (2) $y = e^{4x} \cos(x^2)$ (3) $y = [\ln(x^3 + 1)]^5$

問題 2.16 次の関数を微分せよ. ※ これまでの $[f(ax + b)]'$ に関する問題の再掲.

(1) $y = (-2x + 1)^5$ (2) $y = (2x - 3)^{\frac{5}{2}}$ (3) $y = \sqrt{(3x + 1)^3}$ (4) $y = \dfrac{1}{(5x + 1)^2}$

(5) $y = \sin(3x + 2)$ (6) $y = \cos(3 - 2x)$ (7) $y = \tan 3x$ (8) $y = e^{-2x}$

(9) $y = e^{2x} \cos 3x$ (10) $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$ (11) $y = \ln(3x - 2)$ (12) $y = \ln(-x)$

(13) $y = \log_3(2x + 1)$ (14) $y = \ln|2x + 1|$ (15) $y = \ln|3 - x|$

◪ 復習：　$[\ln|f(x)|]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.$

2.7 対数微分法：微分法の技術 ①

【例題 2.8】

$y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ を微分せよ．

今までの知識だけでこの問題を解く場合，次のような解答があり得る：

$$y = x^{\sin x} = e^{\ln x \cdot \sin x} \qquad \therefore\ y' = e^{\ln x \cdot \sin x}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x + \ln x\cdot\cos x\right)$$
$$= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\right).$$

ここでは，対数微分法と呼ばれる方法を紹介する．

✍

問題 2.17　次の関数を対数微分法で微分せよ．ただし，$x > 0$ とする．

(1)　$y = x^x$　　(2)　$y = x^{\cos x}$

問題 2.18　$x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ のとき，次の公式を証明せよ．

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

2.8 逆関数の微分法：微分法の技術 ②

関数 $y = f^{-1}(x)$ を微分せよ，という問題を考える．例えば，$f(x) = e^x$ なら，$y = f^{-1}(x) = \ln x$ は微分すると $y' = \dfrac{1}{x}$ である．ほかにも，$f(x) = x^2$ $(x > 0)$ なら，$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ は微分すると $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である．—「$y' = \dfrac{1}{f'(y)}$」という関係が成り立っていそうだ．以下，これを示す．　✍

関数 f が微分可能であるとき，その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ について，

$$y' = [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \qquad i.e.\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \left(\text{ただし，} f'(y) = \frac{dx}{dy} \neq 0\right).$$

問題 2.19

関数 $f(x) = x^4$ $(x \geqslant 0)$ の逆関数が $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$ であることを用いて，関数 $y = \sqrt[4]{x}$ を微分せよ．

3　逆三角関数と双曲線関数

3.1　逆三角関数

ここでは，三角関数の逆関数を考える．　— “$\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ になるような θ は？”

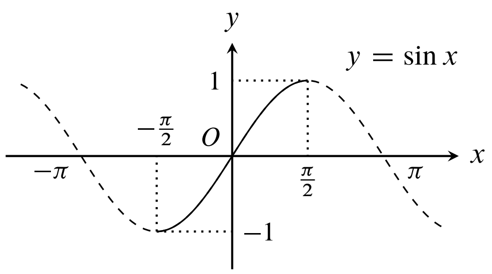
ただし，三角関数は周期関数なので，定義域を適当に限定する必要がある．

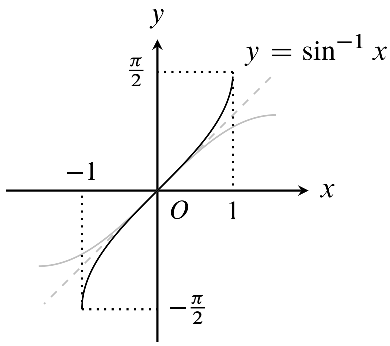
◪　逆正弦関数　$y = \sin^{-1} x$

正弦関数 $y = \sin x$ は，定義域を $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ に限定すれば，ある $y \in [-1, 1]$ の値に対して x の値がただ一つに決まる（主値）．つまり，逆関数が存在する．これを逆正弦関数 アークサイン (arcsine) といい，

$$y = \sin^{-1} x \qquad や \qquad y = \arcsin x \qquad\qquad (\iff x = \sin y)$$

などと表す．定義域は $x \in [-1, 1]$ で，値域は $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ である．





例.　$\sin^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$，$\sin^{-1}\dfrac{1}{3} = 0.3398369\cdots$ rad.

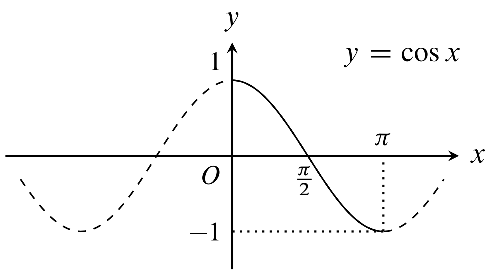
注意.　$\sin^2 x = (\sin x)^2$ であるが，$\sin^{-1} x = (\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ ではない．$f^{-1}(x)$ と同じ記法である．
三角関数の n 乗を $\sin^n x$ のように書くのは，n が正の整数のときだけである．

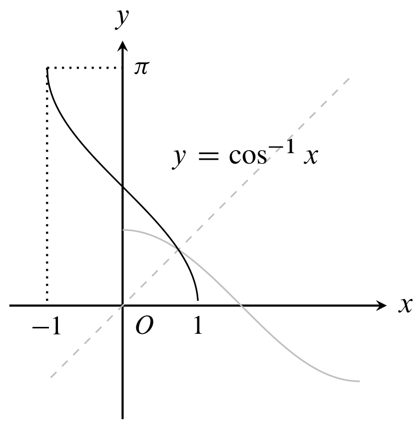
◪　逆余弦関数　$y = \cos^{-1} x$

余弦関数 $y = \cos x$ は，定義域を $x \in [0, \pi]$ に限定すれば，ある $y \in [-1, 1]$ の値に対して x の値がただ一つに決まる（主値）．つまり，逆関数が存在する．これを逆余弦関数 アークコサイン (arccosine) といい，

$$y = \cos^{-1} x \qquad や \qquad y = \arccos x \qquad\qquad (\iff x = \cos y)$$

などと表す．定義域は $x \in [-1, 1]$ で，値域は $y \in [0, \pi]$ である．





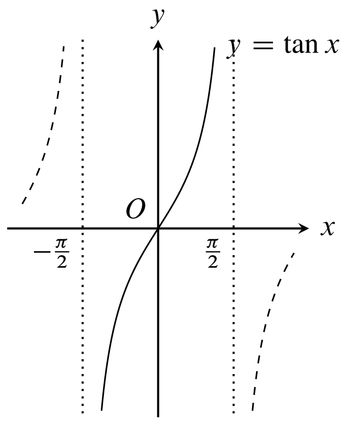
例. $\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$， $\cos^{-1}\dfrac{1}{3} = 1.230959\cdots$ rad.

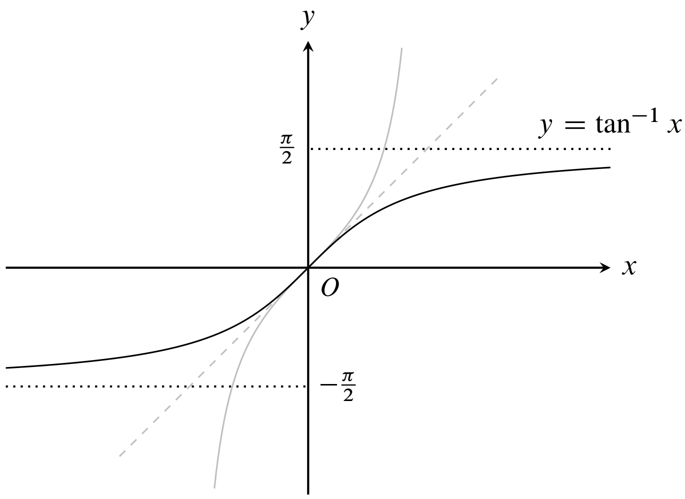
◪ 逆正接関数 $y = \tan^{-1} x$

正接関数 $y = \tan x$ は，定義域を $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ に限定すれば，ある $y \in (-\infty, \infty)$ の値に対して x の値がただ一つに決まる（主値）．つまり，逆関数が存在する．これを逆正接関数 (arctangent)（アークタンジェント）といい，

$$y = \tan^{-1} x \qquad や \qquad y = \arctan x \qquad (\iff x = \tan y)$$

などと表す．定義域は $x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$（実数全体）で，値域は $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ である．





例. $\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$， $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} = 0.4636476\cdots$ rad.

◪ その他

$y = \sec x$, $y = \csc x$, $y = \cot x$ についても，同様に逆関数を考えられる．

問 $y = \sec^{-1} x$, $y = \csc^{-1} x$, $y = \cot^{-1} x$ はどんな関数か？

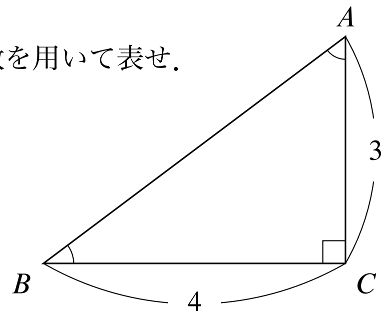
問題 3.1　次の値を求めよ．

(1) $y = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $y = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $y = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $y = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(6) $y = \tan^{-1} 1$　(7) $y = \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　(8) $y = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(9) $y = \sin^{-1} 0$

問題 3.2　右図の直角三角形 ABC について，角 A, B を逆正弦関数を用いて表せ．



問題 3.3　$0 < x < 1$ とする．図を用いて，$\cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を証明せよ．

3.2　逆三角関数の導関数

- $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(x \neq \pm 1)$　導出. ✍
- $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(x \neq \pm 1)$　導出. ✍
- $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　導出. ✍

【例題 2.9】

関数 $y = \sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分せよ．ただし，$a > 0$ とする．

✍

問題 3.4　次の関数を微分せよ．ただし，$a \neq 0$ とする．

(1) $y = \cos^{-1} 2x$　(2) $y = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$　(3) $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$　(4) $y = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

3.3 双曲線関数

双曲線関数を，三角関数（円関数と呼ぶべき？）と類比しながら紹介してゆく．

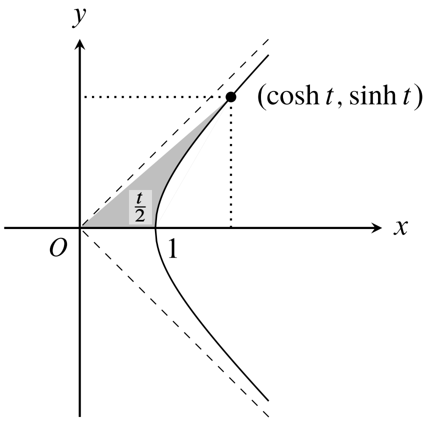
◪ 双曲線関数 (hyperbolic function)

定義 1.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

これら以外にも，$\operatorname{sech} x, \operatorname{csch} x, \coth x$ がある．

定義 2. “単位双曲線” $x^2 - y^2 = 1$ 上の点を $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ と定める $(x > 0)$.



- **相互関係** $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ など．

問　これ（ら）を示せ．

- **偶奇性** $\sinh x$ は奇関数，
  $\cosh x$ は偶関数，
  $\tanh x$ は奇関数．

問　これらを示せ．

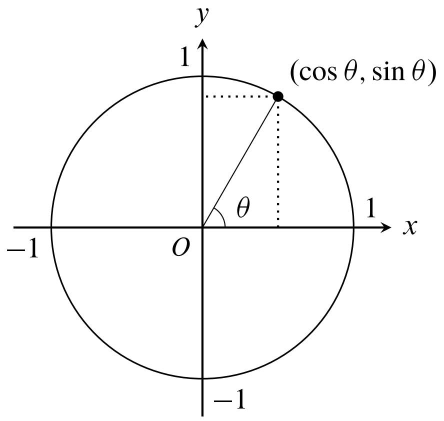
◪ 三角関数 (trigonometric function)（円関数）

定義 1.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

これら以外にも，$\sec x, \csc x, \cot x$ がある．

定義 2. 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点を $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と定める．

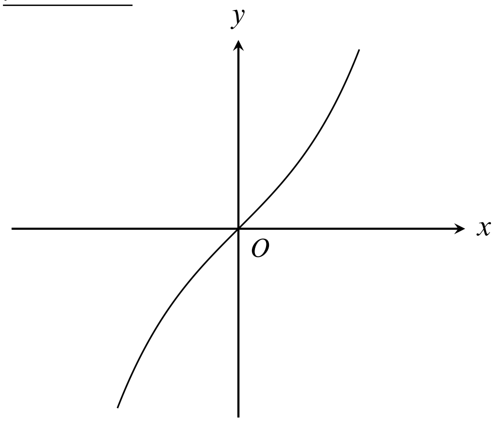


- **相互関係** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ など．

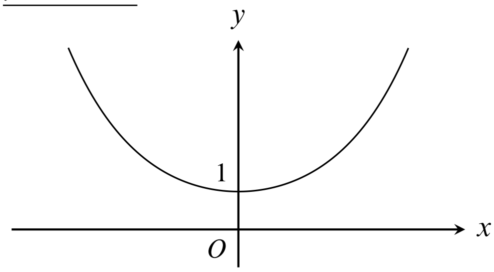
- **偶奇性** $\sin x$ は奇関数，
  $\cos x$ は偶関数，
  $\tan x$ は奇関数．

- **グラフ**

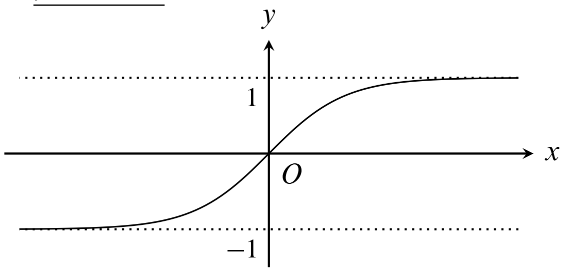
$y = \sinh x$



$y = \cosh x$



$y = \tanh x$



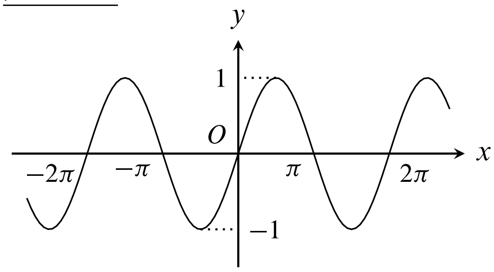
- **加法定理**　（複合同順）

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

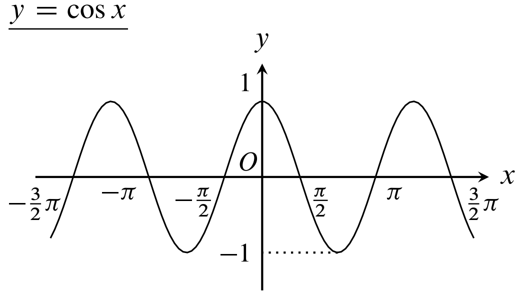
問　これらを示せ．

- **グラフ**

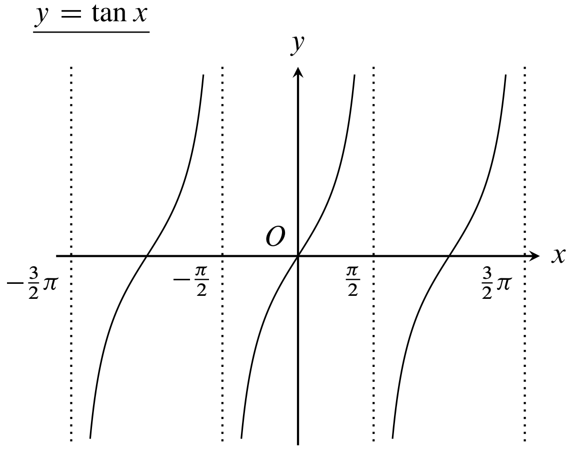
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



- **加法定理**　（複合同順）

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

- **導関数**

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

問　これらを導出せよ.

- **逆双曲線関数**

$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\quad x \in \mathbb{R}$

$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\quad x \in [1, \infty)$

$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x},\quad x \in (-1, 1)$

問　これらを示せ.
また，グラフの概形を描け.

また逆双曲線関数の導関数は,

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x \neq 1),$$
$$(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

問　これらを導出せよ.

- **導関数**

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

- **逆三角関数**

$\sin^{-1} x,\quad x \in [-1, 1]$

$\cos^{-1} x,\quad x \in [-1, 1]$

$\tan^{-1} x,\quad x \in \mathbb{R}$

また逆三角関数の導関数は,

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \neq \pm 1),$$
$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \neq \pm 1),$$
$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

問題3.5

$\sinh x = a$ のとき, $\cosh x, \tanh x$ の値を求めよ.

$\sin x = a$ のとき，$\cos x, \tan x$ の値を求めよ.

4　微分法の応用

4.1　関数の連続性

定義（連続）．関数 $f(x)$ の定義域内の点 $x = a$ において，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつその値が $f(a)$ に等しいとき，つまり，

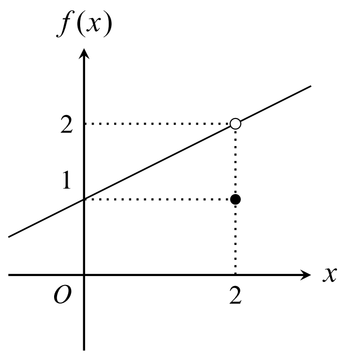
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．また，$f(x)$ がある区間 I のすべての点で連続であるとき，$f(x)$ は I で連続であるという．

※ イメージ：　グラフがつながっている．

※　$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しても，$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ となる例．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2(x-2)} & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$



◪　微分可能性

定義（微分可能）．関数 $f(x)$ の定義域内の点 $x = a$ において，微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，つまり，極限値

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき（有限確定値），$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという．また，$f(x)$ がある区間 I のすべての点で微分可能であるとき，$f(x)$ は I で微分可能であるという．

※ イメージ：　グラフが尖っていたり（折れていたり）切れていたりしない．

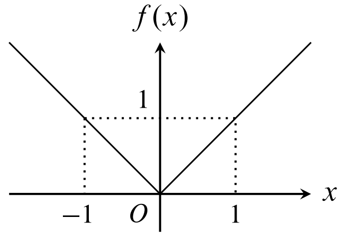
次の定理が成り立つ：

$$f(x) \text{ は } x = a \text{ で微分可能} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ は } x = a \text{ で連続} .$$

なお，この逆は必ずしも成り立たない．　　証明. ✍

※　$f(x)$ が $x = a$ で連続であっても，$x = a$ で微分可能でない例．

$$f(x) = |x|$$



◪ 中間値の定理

定理（中間値の定理）. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ のとき，$f(a)$ と $f(b)$ との間にある任意の値 k に対して

$$f(c) = k \quad (a < c < b)$$

を満たす点 c が少なくとも一つ存在する．

特に，$f(a)$ と $f(b)$ とが異符号 $(f(a)f(b) < 0)$ のとき，$k = 0$ として，

$$f(x) = 0 \quad (a < x < b)$$

を満たす x，すなわち，方程式 $f(x) = 0$ の実数解 $x = c$ が少なくとも一つ存在する．

【例題 4.1】

方程式 $\cos x = x$ は，区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に実数解をもつことを証明せよ．

✍

問題4.1　方程式 $x^4 - 5x + 2 = 0$ は，区間 $(-1, 1)$ に少なくとも一つの実数解をもつことを証明せよ．

問題4.2　方程式 $\sin x = x - 1$ は，区間 $(0, \pi)$ に少なくとも一つの実数解をもつことを証明せよ．

以上の定理を用いると，方程式の解の近似値（数値解）を求めることができる．その方法を，§4.2 で紹介する．

◪ 最大値・最小値

定理（最大値・最小値の存在）. 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ は，この区間で必ず最大値と最小値をもつ．すなわち，区間 $[a,b]$ 内の任意の x について，

$$f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$$

を満たすような c_1 および c_2 が区間 $[a,b]$ に必ず存在する（$f(c_1), f(c_2)$ がそれぞれ最小値，最大値である）．

問題4.3　次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1)　$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \leqslant x \leqslant 4)$　　(2)　$y = -2x^2 + 4x \ (-2 \leqslant x \leqslant 0)$

4.2 方程式の数値解法

実用上，解くべき方程式が必ずしも手計算によって解くことができるとは限りません（問題集やテストでは手計算で解ける問題しか出題されない）．あるいは，手計算で解くことはできるけれども計算が煩雑で時間がかかる場合に，必ずしも手計算で頑張らなくとも，コンピュータで近似的な解を求めてしまえばそれで十分ということもあります．

ここでは，これまでに学習してきた知識を元手に，そのようなコンピュータで近似的な解を求めるための方法を紹介します．例題として，5 次方程式 $x^5 + x - 1 = 0$ を解くことを考えましょう．

◪ 二分法

$f(x) = x^5 + x - 1$ とおくと，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

なので，中間値の定理により，方程式 $f(x) = x^5 + x - 1 = 0$ は少なくとも一つ実数解をもつことが分かります（実際は，この方程式は実数解をただ一つだけもつ）．もう少し“当たりをつけて”,

$$f(0) = -1 < 0\,, \quad f(1) = 1 > 0$$

なので，方程式 $f(x) = 0$ は区間 $(0, 1)$ に少なくとも一つ実数解をもつことが分かります．

次に，区間 $[0, 1]$ の中点 $x = 0.5$ について調べてみると，

$$f(0.5) = -0.46875 < 0$$

なので，方程式 $f(x) = 0$ の実数解は区間 $(0.5, 1)$ にあることが分かります．さらに，区間 $[0.5, 1]$ の中点 $x = 0.75$ について調べてみると，

$$f(0.75) = -0.0126953125 < 0$$

より方程式 $f(x) = 0$ の実数解は区間 $(0.75, 1)$ にあり，区間 $[0.75, 1]$ の中点 $x = 0.875$ について調べてみると，

$$f(0.875) = 0.387908935546875 > 0$$

より方程式 $f(x) = 0$ の実数解は区間 $(0.75, 0.875)$ にあり，......

というふうにして，方程式 $f(x) = 0$ の実数解が存在する区間の幅を半分，また半分と小さくしていくと，方程式 $f(x) = 0$ の実数解の近似値を求めることができます．この方法を二分法といい，これをコンピュータで実行するためのコードは，Listing 1 のようになります（計算精度を 10^{-10} としている）．なお，二分法の誤差（真の値との差）の上限は，区間の幅の半分です．

実際に Listing 1 を実行してみると，

```
x =  0.7548776663
```

という結果が表示されます．

Listing 1: 二分法の計算プログラムの例 (C++).

```
#include<cmath>
#include<iostream>
#include<iomanip>
using namespace std;

int main(){
  double xl, xr, xc;
  double fl, fr, fc, ss;

  ss=1.0;

  xl=0.0; xr=1.0;

  while(ss>1.0e-11){
    xc = (xl+xr)/2;
    fl = xl*xl*xl*xl*xl + xl - 1.;
    fr = xr*xr*xr*xr*xr + xr - 1.;
    fc = xc*xc*xc*xc*xc + xc - 1.;

    if(fl*fc<0){
      xr = xc;
    }
    else{
      xl = xc;
    }

    ss = fabs(1-xr/xl);
  }

  cout << setprecision(10);
  cout << "x= " << xc << '\n';

  return 0;
}
```

◪ Newton 法

ほかにも，方程式の数値解法として，Newton（ニュートン）法と呼ばれる方法もよく知られています．これは，曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を利用して，方程式 $f(x) = 0$ の解の近似値を求める方法です．

まず，“解に近い値” x_1 をとり，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x_1, f(x_1))$ における曲線の接線：

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)\,,$$

を引きます．この直線の x 切片を x_2 とすると，

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

が成り立ちます．

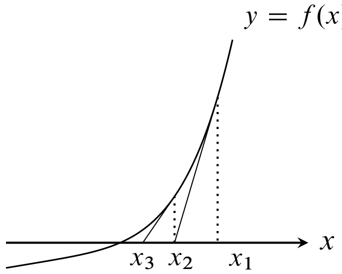
次に，点 $(x_2, f(x_2))$ における曲線の接線の x 切片を x_3 とし，点 $(x_3, f(x_3))$ における曲線の接線の x 切片を x_4 とし，...... というふうにこの操作を繰り返してゆくと，数列

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

が得られます．この数列は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{$*$}$$

を満たしており，数列 $\{x_n\}$ は初期値 x_1 と漸化式 $(*)$ とから決定することができます．



この数列 $\{x_n\}$ は，初期値を“適切に”選べば，方程式の解の真の値に急速に近づいてゆき，効率よく方程式の解の近似値を求めることができます．この方法を Newton 法といいます．なお，Newton 法の誤差の上限は，$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$ となったとすると，ε です．

問 Newton 法を用いて 5 次方程式 $x^5 + x - 1 = 0$ の数値解を求めるプログラムを作れ．

問 a を正の定数とする．$f(x) = x^2 - a$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線の x 切片を x_{n+1} とする．このようにして，x_1 から順に $x_2, x_3, \ldots$ を求める．ただし，$x_1 > \sqrt{a}$ とする．

(1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ．

(2) $x_{n+1} - \sqrt{a} < \dfrac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

みなさん，中間試験お疲れ様でした．中間試験を終えて，また結果を見て，それぞれ思うところはあると思いますが，次に向けてまた頑張っていきましょう．

♦ これだけは覚えておいて欲しいこと ♦

- **コトバ（日本語，数式 *etc.*）は正確に使おう！**

問題　試験で「関数 x^2 の導関数を求めよ」という問題が出題され，答案に

$$x^2 = \underline{2x}_{/\!/} \tag{A}$$

と書いたところ，書き方がマズいとかで，N 先生（奈須田ではないです）に×を付けられてしまいました．それはなぜでしょうか？ ところで，中学校のときの二次方程式の問題を思い出してみると，「次の二次方程式

$$x^2 = 2x \tag{B}$$

を解け」という問題がありました．N 先生によると，この書き方は「正しい」とのことです．(A) と (B) とでは，表面上，同じ式に見えますが，(B) の方は正しいのはなぜでしょうか？

試験が終わったから勉強しよう　—ノーベル物理学賞受賞者・朝永振一郎のエピソード—

ノーベル物理学賞受賞者・朝永振一郎の死に際して，彼の三高時代からの友人は，弔辞の中で，次のように語ったそうです：

「……朝永君の学力については，私は専門違いで分かりませんが決してガツガツと勉強しているようには見受けられませんでした．ただ，高等学校 1 年生，1 学期の試験が済んだ時，ちょうど雨が降っておりまして，私は野球部の選手をしておりましたので練習が休みになりまして，彼の家に活動写真を見に行くべく誘いに行ったのでありますが，彼に断られたのであります．その理由が，試験が済んだ日は一番気が落着いて，全科目がよくわかっているので，何ということもなく全科目を読み直すのを楽しみにしているのだから，今日だけは勘弁してくれ，とのことでした．私は，これを聞いて，これは我々とカテゴリーの違う人間だとしみじみ感じたのであります．これは単に勉強家というのではなく，学問を楽しむ人でなければ言えないことだと存じます．成程，彼は決してガツガツ勉強する人ではなかったと思いますが，彼が好きな酒をたしなみながら，悠然と楽しむように勉強していたのではないだろうかと思います．……」

参考： 江沢洋・東京物理サークル編著，［増補版］物理なぜなぜ事典 ①力学から相対論まで，日本評論社 (2011).

4.3　微分法と関数のグラフ

◪　第 2 次導関数

※詳しくは，改めて別の機会に扱う．

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第 2 次導関数といい，y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などと表す．

例．$y = x^2$ のとき，$y' = 2x,\ y'' = 2.$
$y = \sin x$ のとき，$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x.$

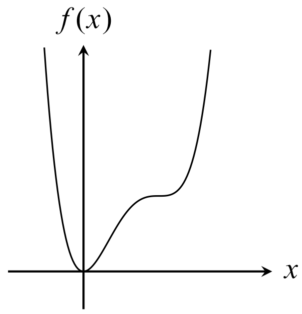
問 $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1$ の第 2 次導関数を求めよ．

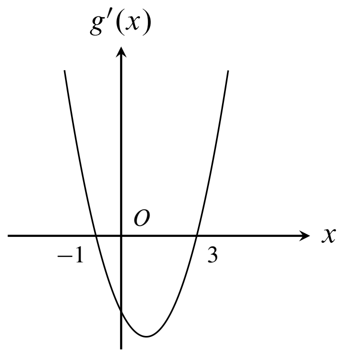
◪ 関数の増減，グラフの凹凸：イントロダクション

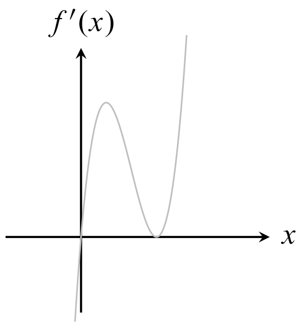
【例題 4.2】

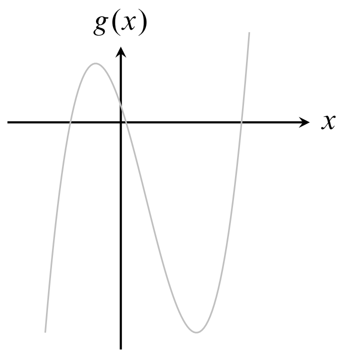
(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフが次のように与えられているとき，$y = f'(x)$ のグラフと $y = f''(x)$ のグラフの概形をそれぞれかけ．

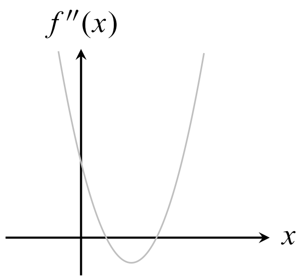
(2) 関数 $y = g'(x)$ のグラフが次のように与えられているとき，$y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，$g(0) = 2$ とする．











結論.

$$
\begin{array}{lllll}
f'(x) > 0 & \Longrightarrow & f(x) \text{ は増加.} & & \\
f'(x) < 0 & \Longrightarrow & f(x) \text{ は減少.} & & \\
f''(x) > 0 & \Longrightarrow & f'(x) \text{ は増加} & \Longrightarrow & f(x) \text{ は下に凸（“左カーブ”）.} \\
f''(x) < 0 & \Longrightarrow & f'(x) \text{ は減少} & \Longrightarrow & f(x) \text{ は上に凸（“右カーブ”）.}
\end{array}
$$

◪ 関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点

【例題 4.3】

関数 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の増減とグラフの凹凸を調べよ．

✍

※　関数 $f(x)$ について，$x = a$ の近くの任意の x に対して $f(a) > f(x)$ が成り立つ（周囲より大きい）とき，$f(x)$ は $x = a$ で極大になるといい，$f(a)$ を極大値 (local maximum) と呼ぶ．　*cf.* 最大値

同様に，$x = a$ の近くの任意の x に対して $f(a) < f(x)$ が成り立つ（周囲より小さい）とき，$f(x)$ は $x = a$ で極小になるといい，$f(a)$ を極小値 (local minimum) と呼ぶ．　*cf.* 最小値

また，極大値と極小値をまとめて，極値 (extremum) という．
（関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能で，その点で極値をとるならば，$f'(a) = 0$.）

※　$x < a$ と $x > a$ とで曲線 $y = f(x)$ の凹凸が変わるとき，点 $(a, f(a))$ をこの曲線の変曲点という．
（関数 $f(x)$ が $x = a$ で 2 階微分可能で，その点で変曲点になるならば，$f''(a) = 0$.）

問題 4.4　次の関数の増減を調べよ．

(1)　$y = 2x^2 + 8x + 5$　　(2)　$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$　　(3)　$y = x^4 - 2x^2 + 3$

【例題 4.4】

次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(1)　$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$　　(2)　$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$　　(3)　$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11$

✍

問題 4.5　次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(1)　$y = x^3 - 3x^2 + 1$　　(2)　$y = -x^4 + 2x^2$　　(3)　$y = 3x^4 - 8x^3 + 7$

(4)　$y = x^3 - 3x$　　(5)　$y = x^4 - 4x^3$

【3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$ のグラフが点対称であることの証明】

準備：2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ のグラフが線対称であることの証明

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ のグラフが $x = -\dfrac{b}{2a}$ に関して線対称であることは，ほとんどの人が知っている事実でしょう．しかし，これを示せと言われると，どうしてよいか分からない人も多いのではないでしょうか？

対称であるとは，ある変換に関して不変であるということです（例．♡ は，真ん中を貫く直線で折り返すという変換に対して，図形が不変）．よって，証明の方針としては，2 次関数の式が不変になるような変換を考え，その変換の下での不変性が線対称を意味していることを確認すれば良さそうです：

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \tag{①}$$

なので（表面上，[変数]^1 の項を消した；平方完成），

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = -\left(X + \dfrac{b}{2a}\right) \\ y = Y \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = -\dfrac{b}{2a} \\ y = Y \end{cases} \tag{②}$$

なる変換の下で，①は

$$Y = a\left[-\left(X + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

と不変になる．②の変換は直線 $x = -\dfrac{b}{2a}$ についての対称移動を表すので，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが $x = -\dfrac{b}{2a}$ に関して線対称であることがいえる．■

証明：

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}$$

$$\therefore \quad y - d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) \tag{③}$$

と変形すると（表面上，[変数]^2 の項を消した），

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{3a} = -\left(X + \dfrac{b}{3a}\right) \\ y - d - \dfrac{2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a} = -\left(Y - d - \dfrac{2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = -\dfrac{b}{3a} \\ \dfrac{y + Y}{2} = d + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} \end{cases} \tag{④}$$

なる変換の下で，③は

$$\begin{aligned} -\left(Y - d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a}\right) &= a\left[-\left(X + \frac{b}{3a}\right)\right]^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left[-\left(X + \frac{b}{3a}\right)\right] \\ \therefore \quad Y - d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} &= a\left(X + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left(X + \frac{b}{3a}\right) + d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} \\ \iff \quad Y &= aX^3 + bX^2 + cX + d \end{aligned}$$

と不変になる．④の変換は点 $\left(-\dfrac{b}{3a}, d + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a}\right)$ についての対称移動を表すので，3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフが点 $\left(-\dfrac{b}{3a}, d + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a}\right)$ に関して点対称であることがいえる．ちなみに，この点は，変曲点である．■

◪ いろいろな関数のグラフ

【例題 4.5】

次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(1) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$

✍

問題 4.6 次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (2) $f(x) = x(\ln x)^2$ (3) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$

Useful Link:

Wolfram Alpha —さまざまな数学の計算を実行してくれる（グラフもかいてくれる！）サイト

https://www.wolframalpha.com

実は，グラフの概形をかくという話はもう一回出てくるのですが……その話は，また後ほど，改めて．

4.4 関数の最大値・最小値

関数の最大値・最小値（あるいはそれらをとる変数の値）を求める問題は，応用上，重要である．1 変数関数の場合，グラフの概形をかけば，視覚的に，関数の最大値・最小値（あるいはそれらをとる変数の値）を求めることができる．

◪ 基本問題

【例題 4.6】

次の関数の ( ) 内の区間における最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 20 \quad (-3 \leqslant x \leqslant 3)$

(2) $y = e^x - e^{-x} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

✍

問題 4.7　次の関数の ( ) 内の区間における最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 2)$

(2) $y = x + 2\cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

(3) $y = x^2 e^{-x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 3)$

(4) $y = x - 2\sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 4)$

◪ その応用

【例題 4.7】

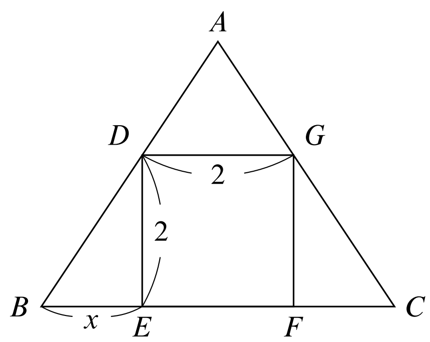
半径 a の円に内接する長方形のうち，面積が最大となるものを求めよ．

✍

問題 4.8　図のように，$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC と 1 辺の長さが 2 の正方形 $DEFG$ がある．点 D, G をそれぞれ辺 AB, AC 上，点 E, F を辺 BC 上にとる．BE の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 二等辺三角形 ABC の面積 S を x の式で表せ．
また，x の変域を求めよ．

(2) S が最小になるときの x の値を求めよ．



4.5 不等式の証明

【例題 4.8】

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ のとき，不等式 $x \geqslant \sin x$ が成り立つことを証明せよ．

✍

問題 4.9 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) すべての実数 x について，$e^x \geqslant 1 + x$ (2) $x \geqslant 0$ のとき，$x \geqslant \tan^{-1} x$

★ 不等式の証明には，以下の方針が考えられる：

- [左辺] $\gtreqless \cdots \gtreqless \cdots \gtreqless$ [右辺] と式変形する；
- [左辺] − [右辺] $\gtreqless 0$ を示す；
- 有名不等式を用いる．

4.6 極値をとるための条件

復習： 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，そこで極値をとるならば $f'(a) = 0$：

$$\text{関数 } f(x) \text{ が } x = a \text{ で極値をとる} \implies f'(a) = 0\,.$$

【例題 4.9】

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x + 3$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ．

(1) 極値をもつ． (2) 常に単調に増加する．

✍

問題 4.10 関数 $y = x^3 - 12x + a$ の極大値が正，極小値が負になるように，定数 a の範囲を定めよ．

4.7 接線・法線

復習： 点 (x_0, y_0) を通る，傾き a の直線の方程式は，$y - y_0 = a(x - x_0)$.

◪ **接線：** 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 (tangent line) の方程式は，

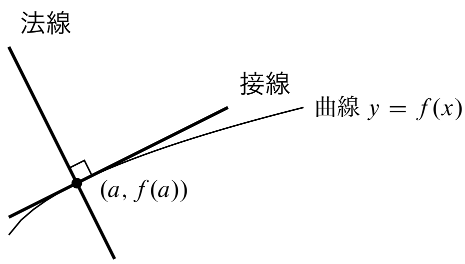
$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \iff y = f(a) + f'(a)(x - a)\,.$$

◪ **法線**

点 $(a, f(a))$ を通り，この点における接線に垂直な直線を，点 $(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の法線 (normal line) という．その方程式は，

$$f'(a) \neq 0 \text{ のとき，} \quad y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)\,,$$

$$f'(a) = 0 \text{ のとき，} \quad x = a\,.$$



【例題 4.10】

曲線 $y = 2\sqrt{x}$ 上の $x = 1$ に対応する点における接線と法線の方程式をそれぞれ求めよ．

✍

問題 4.11 次の曲線上の ( ) 内の x の値に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(1) $y = x^3 \ (x = 2)$ (2) $y = \dfrac{1}{x^2} \ (x = -1)$

(3) $y = \cos x \ (x = \pi)$ (4) $y = e^x \ (x = -2)$

問題 4.12 次の曲線上の ( ) 内の x の値に対応する点における法線の方程式を求めよ．

(1) $y = x^2 + 3x \ (x = 1)$ (2) $y = \sin x \ \left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$

4.8 l'Hôspital（ロピタル）の定理：極限計算への応用 ①

種々の極限計算において，不定形の解消は重要なステップであった．ここでは，導関数を用いて不定形を解消する方法を紹介する．　*cf.* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$［例題 4.5 (2)］

定理（l'Hôspital の定理）．関数 $f(x), g(x)$ は $f(a)=g(a)=0$ を満たし，$x=a$ の近くで微分可能で，$g'(x)\neq 0$ $(x\neq a)$ であるとする．このとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ が存在するならば，}\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

※　証明には，Cauchy（コーシー）の平均値の定理を用いる（→ 第 14 週 ①）．

※　この定理は，形式的に，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形や $x\to\infty$ の場合にも適用できることが知られている．

【例題 4.11】

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\ln x$

✍

××× 誤用例 ×××

- $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{2x^2}\overset{\times}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(2x-1)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{4x}=\boxed{\frac{1}{4}}.$　… ×××
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}\overset{\times}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\sin x)$

  この極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ も $\boxed{\text{存在しない}}$．　… ×××

問　これらの極限を正しく計算せよ．　答．$\dfrac{3}{8}$，1

問題4.13　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^3+3x^2-4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\sqrt{x}\ln x$

5　高次導関数

復習：　関数 $y=f(x)$ が区間 I で微分可能であるとき，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を $f(x)$ の導関数といい，$f'(x)$ のほかに，y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$ などと表すこともある．さらに，$f'(x)$ も微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第 2 次導関数といい，$f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などと表す．

（復習終わり）

cf.　$f''(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

問題 5.1　次の関数の第 2 次導関数を求めよ．

(1)　$y=\sqrt[3]{x^2}$ $(x>0)$　　(2)　$y=(3x+4)^5$　　(3)　$y=xe^x$

定義（高次導関数）．関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が区間 I で微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第 2 次導関数または 2 階導関数 (second derivative) といい，$f''(x)$ と表す．同様に，$f''(x)$ が微分可能のとき，$f(x)$ の第 3 次導関数（3 階導関数）$f'''(x)$ が定義される．以下帰納的に，$f(x)$ の第 n 次導関数（n 階導関数）$f^{(n)}(x)$ が定義され微分可能のとき，$f^{(n)}(x)$ の導関数として第 $n+1$ 次導関数 $f^{(n+1)}(x)$ が定義される．次数が 2 以上の導関数を高次導関数 (higher-order derivative) という．

n 階導関数は，$f^{(n)}(x)$ のほかに，$y^{(n)}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などと表すこともある．

定義（n 回微分可能）．関数 $y=f(x)$ が区間 I で n 次までの導関数が存在するとき，n 回微分可能であるという．さらに，第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が I で連続のとき，$f(x)$ は I で C^n 級であるという．

※　$f(x)$ が C^0 級であるとは，単に連続であることを表す．
　　$f(x)$ が任意回数微分可能であるとき，C^∞ 級（または無限回微分可能）であるという．

【例題 5.1】

関数 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 n 次導関数を求めよ．

✍

問題 5.2　次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

(1)　$y=e^{3x}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{1-x}$

復習：　$(fg)' = f'g + fg' \quad \cdots\cdots (*)$

さらに，$(fg)'' = (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''$,

$(fg)''' = (f'''g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g'' + fg''') = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$,

と計算できる．

命題（Leibniz（ライプニッツ）の公式）．　f, g が n 回微分可能な関数のとき，

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= f^{(n)}g + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}g' + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}g'' + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(n)} \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}g^{(r)} .\end{aligned}$$

ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ は $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ とも書かれ，$(a+b)^n$ を展開したときの $a^{n-r}b^r$ の係数（二項係数）である．

cf.　Pascal（パスカル）の三角形．

証明.　数学的帰納法を用いる．$n = 1$ のとき，$(*)$ であり Leibniz の公式は成立する．ここで $n = k$ のときに Leibniz の公式 が成り立つと仮定すると，

$$(fg)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}g^{(r)}$$

であり，両辺を x で微分して，

$$(fg)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r \left[f^{(k-r+1)}g^{(r)} + f^{(k-r)}g^{(r+1)} \right]$$

を得る．${}_k\mathrm{C}_{r-1} + {}_k\mathrm{C}_r = {}_{k+1}\mathrm{C}_r$ に注意して，この右辺を $g^{(r)}$ に関する和に書き直すと，

$$\sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}g^{(r)}$$

となる．よって，任意の n に対して Leibniz の公式が成立する．∎

【例題 5.2】

$y = x^2 \sin x$ の第 3 次導関数を求めよ．

✍

問題 5.3　$y = x^3 \cos x$ の第 4 次導関数を求めよ．

6　曲線の媒介変数表示

6.1　媒介変数表示：イントロダクション

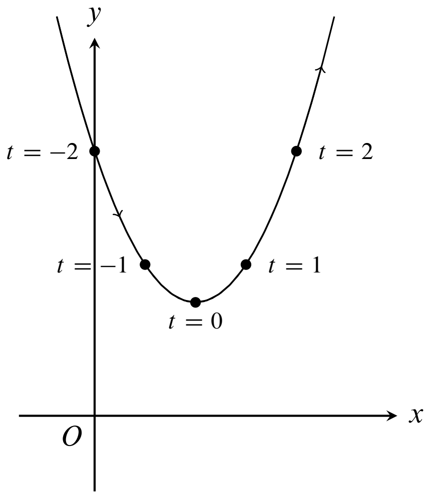
復習：　関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $+2$，y 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線である．

　これを，$t = x - 2$ とおいて，次のように考えてみよう．つまり，関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフ上の点 P の x 座標と y 座標は，変数 t によって

$$x = t + 2\,, \quad y = t^2 + 3\,,$$

で表される．t の値が変わると，それに対応して x, y の値も変わり，点 P の軌跡は曲線 $y = (x-2)^2+3$ を描く．

t	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$	7	4	3	4	7	12	$\cdots$



　変数 x, y が，ともに変数 t の関数として

$$x = f(t)\,, \quad y = g(t)\,, \tag{$*$}$$

と表されるとき，それらを座標にもつ点 $P\ (x, y)$ はある曲線を描く．このとき，$(*)$ をこの曲線の媒介変数表示あるいはパラメータ表示といい，変数 t を媒介変数やパラメータ (parameter) と呼ぶ．

注意.　媒介変数によるある曲線 C の表示は一通りとは限らない．
また，$y = (x-2)^2 + 3$ の例のように，媒介表示された曲線が必ず $y = [x$ の式$]$ の形に変形できるわけではない．

復習：　原点 O を中心とする半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ は，一般角 θ を用いて

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,,$$

と表される．

【例題 6.1】

$x = t^3 - 2t^2 + 1,\ y = t^2 - t$ で表される曲線の概形をかけ.

✍

問題 6.1　$x = 1 - \dfrac{1}{4}t^2,\ y = \sqrt{t}\ (0 \leqslant t \leqslant 4)$ で表される曲線について，上の例題と同様にして，その概形をかけ.

6　曲線の媒介変数表示

6.1　媒介変数表示：イントロダクション

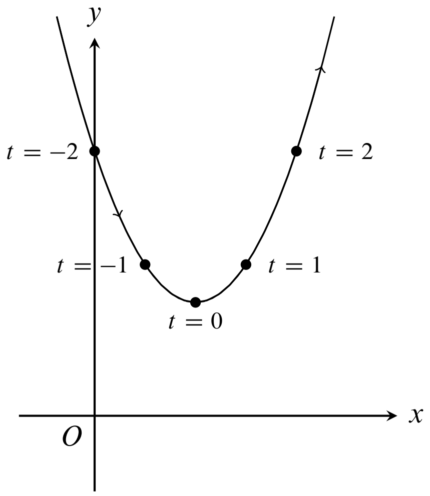
復習：　関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $+2$，y 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線である．

これを，$t = x - 2$ とおいて，次のように考えてみよう．つまり，関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフ上の点 P の x 座標と y 座標は，変数 t によって

$$x = t + 2\,,\quad y = t^2 + 3\,,$$

で表される．t の値が変わると，それに対応して x, y の値も変わり，点 P の軌跡は曲線 $y = (x-2)^2 + 3$ を描く．

t	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$	7	4	3	4	7	12	$\cdots$



変数 x, y が，ともに変数 t の関数として

$$x = f(t)\,,\quad y = g(t)\,, \tag{$*$}$$

と表されるとき，それらを座標にもつ点 P (x, y) はある曲線を描く．このとき，$(*)$ をこの曲線の媒介変数表示あるいはパラメータ表示といい，変数 t を媒介変数やパラメータ (parameter) と呼ぶ．

注意.　媒介変数によるある曲線 C の表示は一通りとは限らない．
また，$y = (x-2)^2 + 3$ の例のように，媒介表示された曲線が必ず $y = [x$ の式$]$ の形に変形できるわけではない．

復習：　原点 O を中心とする半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ は，一般角 θ を用いて

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,,$$

と表される．

【例題 6.1】

$x = t^3 - 2t^2 + 1,\ y = t^2 - t$ で表される曲線の概形をかけ．

✍

問題 6.1　$x = 1 - \frac{1}{4}t^2,\ y = \sqrt{t}\ (0 \leqslant t \leqslant 4)$ で表される曲線について，上の例題と同様にして，その概形をかけ．

6.2　いろいろな曲線の媒介変数表示

◪　**円**　　　*cf.*　配布プリント p. 49 下．

◪　**楕円**

<u>問題 6.2</u>　媒介変数 t によって

$$x = 3\cos t\ , \quad y = 2\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

と表される曲線は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ であることを証明せよ．　　　*cf.*　$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

◪　**放物線**　　　*cf.*　配布プリント p. 49 上，<u>問題 6.4</u> (1)．

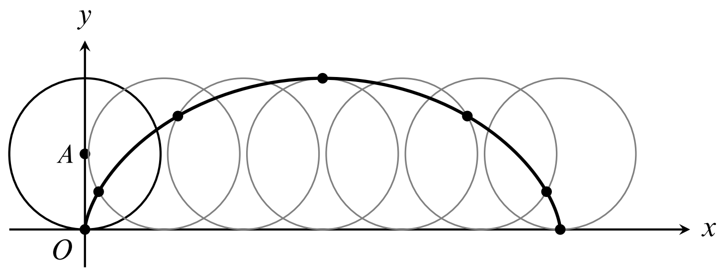
◪　**双曲線**　　　*cf.*　双曲線関数，<u>問題 6.3</u> (2)

◪　**サイクロイド (cycloid)**

【例題 6.2】

点 $A\ (0, a)$ を中心とする半径 a の円がある．この円が x 軸上を正の方向にすべらずに 1 回転するとき，始めに原点にあった点 P の軌跡は，次の媒介変数表示によって与えられることを証明せよ．

$$x = a(t - \sin t)\ , \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$



✍

cf.　トロコイド，エピサイクロイド，ハイポサイクロイド

◪　**カージオイド (cardioid)**　　　※　エピサイクロイドの特殊な場合．

$$x = a(1 + \cos t)\cos t\ , \quad y = a(1 + \cos t)\sin t$$

◪　**アステロイド (astroid)**　　　※　ハイポサイクロイドの特殊な場合．

$$x = a\cos^3 t\ , \quad y = a\sin^3 t$$

cf.　<u>問題 6.3</u> (1)

リサージュ

◪　**Lissajous 曲線**

$$x = x_0 \sin(\omega_x t)\ , \quad y = y_0 \sin(\omega_y t + \delta)$$

cf.　<u>問題 6.4</u> (2)，教科書 p. 78，<u>発展問題</u>

6.3　媒介変数表示による関数の導関数

$x = f(t),\ y = g(t)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \text{（ただし，} f'(t) \neq 0\text{）}$$

である．

【例題 6.3】

半径 r の円の媒介変数表示 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

✍

問題 6.3　次の媒介変数表示による関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$　　(2)　$x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2},\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

【例題 6.4】

サイクロイド $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ 上の $t = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点を求めよ．また，その点における接線の方程式を求めよ．

✍

問題 6.4　次の媒介変数で表される曲線上の ( ) 内の t の値に対応する点を求めよ．また，その点における接線の方程式を求めよ．

(1)　$x = t - t^2,\ y = t - 1 \quad (t = 1)$　　(2)　$x = 2\sin t,\ y = \cos 2t \quad \left(t = \dfrac{\pi}{3}\right)$

発展問題　曲線 $x = \cos\theta,\ y = \sin 2\theta$ の概形をかけ．

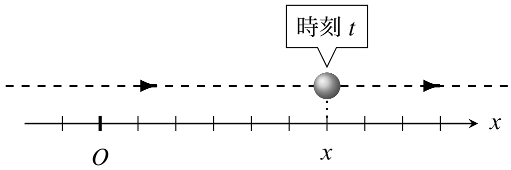
6.4　速度・加速度：物理への応用①（運動学）

◪　直線上の点の運動

直線上を運動する点 P（*cf.* 大きさのある物体の代表点）を考える．点 P が運動する直線上に適当に原点 O をとり，この直線に数直線を対応させる．点 P の時刻 t における座標（つまり位置）を x とすると，x は t の関数である：

$$x = f(t)\,.$$

ただし，物理の文脈では，これを $x = x(t)$ と略記することが多い．



速度　時刻 t から $t + \Delta t$ の間に，点 P は $x(t)$ から $x(t + \Delta t)$ に動くから，その平均速度 $\overline{v(t)}$ は

$$\overline{v(t)} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

と表される（平均変化率）．時刻 t における点 P の速度 (velocity) $v(t)$ は，$\Delta t \to 0$ として

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

で定義される．また，速度 v の絶対値 $|v|$ を速さ (speed) という．

加速度　さらに，時刻 t における速度 v の時間変化率 a を，時刻 t における点 P の加速度 (acceleration) $a(t)$ という：

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)\,.$$

【例題 6.5（等加速度運動）】

地上 y_0 [m] の位置から v_0 [m/s] の速度で真上に打ち上げられた物体の t 秒後の高さを y [m] とすると，次の等式が成り立つ：

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0\,.$$

ただし，g [m/s^2] は重力加速度の大きさを表す．次の問いに答えよ．

(1)　この物体の t 秒後の速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ．

(2)　最高の高さに到達するまでの時間 T [s] とその高さ H [m] を求めよ．

(3)　$y_0 = 1.8$ m, $v_0 = 29.4$ m/s, $g = 9.8$ m/s^2 とする．このときの T と H の値を求めよ．

◪ 平面上の点の運動

平面上を運動する点 P の速度と加速度について考える．点 P が運動する平面上に適当に原点 O をとり，この平面に xy 平面を対応させる．点 P の時刻 t における座標（位置）を (x, y) とすると，x, y はそれぞれ t の関数である．点の位置は，位置ベクトル $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて表すのが便利である．

平面上を運動する点 P の速度と加速度は，x 成分と y 成分をそれぞれ独立に考え，直線上を運動する点の問題に帰着させれば良い（空間内の点の運動の場合も同様）．つまり，x の時間変化率 $\dfrac{dx}{dt}$, y の時間変化率 $\dfrac{dy}{dt}$ を用いて，

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

が時刻 t における点 P の速度（速度ベクトルともいう）であり，その速さは $\vec{v}$ の大きさ

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

である．同様に，時刻 t における点 P の加速度 $\vec{a}(t)$ は

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

である（加速度ベクトルともいう）．

【例題 6.6（等速円運動）】

原点 O を中心とする半径 r の円周上を運動する点 P がある．いま，点 P が点 $A\,(r, 0)$ を出発し，原点 O のまわりを角速度 ω [rad/s] で回転するものとする．次の問いに答えよ．

(1) 出発してから t 秒後の速度 $\vec{v}(t)$ と加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}(t)$ と $\vec{a}(t)$ の大きさをそれぞれ求めよ．

(3) 速度 $\vec{v}(t)$ の x 成分がゼロとなるときの点 P の座標を求めよ．

※ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{v_y}{v_x}$ は，点 P の描く曲線の点 P における接線の傾きを表す．

cf. 速度ベクトルの向き．

※ 媒介変数表示 $(*)$ された曲線は，時刻 t に伴って動く点 P の軌跡と考えることができる：

$$x = f(t)\,, \quad y = g(t) \qquad \text{and} \qquad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

7　微分法の応用を支える基礎理論

これまでに扱ってきた「微分法の応用」において，その基本にあるのは，多くの場合，

> 関数 $f(x)$ が，ある区間で微分可能で $f'(x) \gtreqless 0$ ならば，その区間で $f(x)$ は $\left\{\begin{array}{c}\text{増加}\\ \text{減少}\end{array}\right\}$ する

という性質であった．これは，一見自明に思われる性質であり，このような命題を数学的に証明するのはしばしば難しいことである．しかしここでは，この性質の証明に挑戦してみよう (§7.1).

さらに，以上の証明に用いられる定理（Lagrange（ラグランジュ）の平均値の定理）の拡張を考えることで，第 11 週①で扱った l'Hôspital（ロピタル）の定理を証明することができるので，これもここで扱う (§7.2)．最後に，3 年生で習う微分法の応用の話題に軽く触れて，本章を終える (§7.3).

7.1　関数の増減に関する性質の証明

◪　最大値・最小値の存在定理

☞　第 6 週 ①

「関数の増減に関する性質の証明」の出発点となるのは，以下の定理である．この定理が成り立つことは，証明なしに認めることにしよう（*cf.* Bolzano–Weierstrass の定理，Heine–Borel の被覆定理）.

定理（最大値・最小値の存在）．閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は，この区間で必ず最大値と最小値をもつ．すなわち，区間 $[a, b]$ 内の任意の x について，

$$f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$$

を満たすような c_1 および c_2 が区間 $[a, b]$ に必ず存在する（$f(c_1)$, $f(c_2)$ がそれぞれ最小値，最大値である）.

◪　Rolle（ロル）の定理

定理（Rolle の定理）．関数 $f(x)$ が，閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であり，さらに $f(a) = f(b)$ であるとき

$$f'(c) = 0$$

を満たすような c が区間 (a, b) に少なくとも 1 つ存在する．

証明.　　$f(x)$ が定数関数のとき，$f'(x) = 0$ だから明らか．以下，$f(x)$ が定数函数でないときを考える．$f(x) - f(a)$ を考えれば，$f(a) = f(b) = 0$ として一般性を失わない．$f(x) > f(a) = 0$ となる x が区間 (a, b) にあると仮定する．このとき，最大値・最小値の存在定理により，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ に正の最大値をもつ．$f(x)$ は $x = c$ で正の最大値をとるとする．$h > 0, c + h \leqslant b$ として，$f(c + h) - f(c) \leqslant 0$ だから，$0 < h \leqslant b - c$ に対して

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0\,.$$

$h \to +0$ とすると，$f(x)$ は $x = c$ で微分可能だから，$f'(c) \leqslant 0$．また，$h > 0, c - h \leqslant a$ として，$f(c-h) - f(c) \leqslant 0$ だから，$0 < h \leqslant c - a$ に対して

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{h} \leqslant 0 .$$

$h \to +0$ とすると，$f(x)$ は $x = c$ で微分可能であり，$f'(c) \geqslant 0$．以上より，$f'(c) = 0$ が分かる．

他方，$f(x) < f(a) = 0$ となる x が区間 (a, b) にあるときは，$-f(x)$ を考えれば上と同様の議論に帰着される．

∎

注意. Rolle の定理の証明から，

$$f(x) \text{ が } x = c \text{ で極値をとる} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0$$

が分かる．

◪ Lagrange（ラグランジュ）の平均値の定理

Rolle の定理の第 3 の仮定「$f(a) = f(b)$ である」は，実は外すことができる．つまり，点 $A\ (a, f(a))$, $B\ (b, f(b))$ が x 軸上に来るように，“うまい変形”をしてやれば良い．それが，Lagrange の平均値の定理である．なお，単に「平均値の定理」というと，この Lagrange の平均値の定理を指す．

定理（Lagrange の平均値の定理）**.** 関数 $f(x)$ が，閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であるとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たすような c が区間 (a, b) 内に少なくとも 1 つ存在する．

証明. 点 $A\ (a, f(a))$, $B\ (b, f(b))$ を通る直線の傾きを m とおくと，

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であり，直線 AB の方程式は，

$$y = f(a) + m(x - a) .$$

$y = f(x)$ との差：

$$F(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

を作ると，$F(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であり，

$$F'(x) = f'(x) - m .$$

さらに

$$F(a) = f(a) - f(a) - m(a - a) = 0 ,$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - m(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0\,.$$

したがって，Rolle の定理より，

$$F'(c) = f'(c) - m = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすような c が区間 (a, b) に少なくとも 1 つ存在する． ∎

◪ 関数の増減に関する性質

Lagrange の平均値の定理を用いて，関数の増減に関する性質が証明できる．

定理（関数の増減）． 関数 $f(x)$ が，開区間 (a, b) で微分可能であるとき

(I) I で $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は I で単調に増加する．

(II) I で $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ は I で単調に減少する．

証明． I で $f'(x) > 0$ のとき，I 内の任意の点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ について，平均値の定理から

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

を満たす c が (x_1, x_2) 内に存在する．$f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ だから

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{i.e.} \qquad f(x_2) > f(x_1)\,.$$

したがって，$f(x)$ は I で単調に増加する．
他方，I で $f'(x) < 0$ のときも，これと同様に示される． ∎

ほかにも，以下の定理が示される．

定理（定数関数であるための必要十分条件）． 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとする．

$$I \text{ で常に } f'(x) = 0 \text{ である} \quad \Longleftrightarrow \quad I \text{ で定数関数である．}$$

証明． $\Longleftarrow$) 自明．
$\Longrightarrow$) 平均値の定理より，

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

を満たす c が (x_1, x_2) 内に少なくとも 1 つ存在する．仮定より $f'(c) = 0$ なので，

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad f(x_2) = f(x_1)\,.$$

よって，$f(x)$ の値は I 内のすべての点で等しいから，$f(x)$ は I で定数関数である． ∎

7.2 l’Hôspital（ロピタル）の定理の証明

◪ Cauchy（コーシー）の平均値の定理

Lagrange の平均値の定理にはさまざまな拡張があるが，応用上，次の Cauchy の平均値の定理が重要である．

定理（Cauchy の平均値の定理）． 関数 $f(x), g(x)$ が，閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能で，区間 (a,b) のすべての点 x について $g'(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たすような c が区間 (a,b) 内に少なくとも 1 つ存在する．

証明. $g'(x) = 0$ より $g(x)$ は単調に増加または減少するから，$g(a) \neq g(b)$ である．Lagrange の平均値の定理の証明と同様に，

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

とおき，

$$F(x) = f(x) - f(a) - m\big[g(x) - g(a)\big]$$

とすると，$F(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能であり，

$$F'(x) = f'(x) - mg'(x)\ .$$

さらに

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - m\big[g(a) - g(a)\big] = 0\ , \\ F(b) &= f(b) - f(a) - m\big[g(b) - g(a)\big] \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big[g(b) - g(a)\big] = 0\ . \end{aligned}$$

したがって，Rolle の定理より，

$$F'(c) = f'(c) - mg'(c) = 0 \qquad i.e. \qquad f'(c) = mg'(c)$$

を満たすような c が区間 (a,b) に少なくとも 1 つ存在する．よって，$g'(c) \neq 0$ だから

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = m \qquad i.e. \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

■

※ Lagrange の平均値の定理は，$g(x) = x$ の場合．

◪ l’Hôspital（ロピタル）の定理

Cauchy の平均値の定理を用いて，l’Hôspital の定理が証明できる．

定理（l'Hôspital の定理）．関数 $f(x), g(x)$ は $f(a) = g(a) = 0$ を満たし，$x = a$ の近くで微分可能で，$g'(x) \neq 0 \ (x \neq a)$ であるとする．このとき，

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在するならば，} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

証明．　仮定より $f(a) = g(a) = 0$ なので，Cauchy の平均値の定理から，a と x の間のある値 c に対して，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ．ここで $x \to a$ の極限を考えると，$c \to a$ となるから

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

■

注意．　$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形の場合や $x \to \infty$ の場合については，これでは証明されない．

7.3　Lagrange の平均値の定理と Taylor（テイラー）の定理，Taylor（テイラー）展開

Lagrange の平均値の定理に現れる $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ という式は，$b = a + h, c = a + \theta h \ (0 < \theta < 1)$ とおいて分母を払うことで，次のように変形される：

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \,.$$

あるいは，$h = x - a$ 書き換えると，

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a + \theta(x - a))$$

を得る．これは，$x = a$ の近くで関数 $f(x)$ が 1 次関数で近似できることを意味している．

$x = a$ の近くで関数 $f(x)$ がより高次の多項式で近似できることを主張するのが，以下の Taylor の定理である：

定理（Taylor の定理）．関数 $f(x)$ が区間 I で n 回微分可能であるとする．a を I 内のある点とすると，I 内の任意の x に対して，a と x の間にある適当な値 c を選べば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n$$

が成り立つ．

※　証明には，Cauchy の平均値の定理を用いる．

cf.　Taylor 展開：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \,.$$

特に $a = 0$ のとき（Maclaurin（マクローリン）展開），

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots \,.$$