2024年度　数学AI　定期試験　（実施日：2024年7月25日）

得点	

2年＿＿組　整理番号：＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意： 試験時間は **100分** です．最終的な答えがどこか分かるように解答してください．またそれに至る過程も採点対象です．採点者に伝わるように書いてください．

問1．次の空欄に当てはまる語句・数式を答えよ．ただし (2), (3) は，{　} 内から適切なものを選び◯で囲むこと．　[3点 × 4]

(1) 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \boxed{}$$

と定義される．さらに $f'(x)$ も微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第2次導関数といい，$f''(x)$ などと表す．

(2) 関数 $f(x)$ が区間 $I = (a, b)$ で2回微分可能であるとき，

- I で $f'(x) > 0$ ならば，
  $f(x)$ は I で単調に $\boxed{\text{(a) \{増加・減少\}}}$ する；
- I で $f''(x) > 0$ ならば，
  曲線 $y = f(x)$ は I で $\boxed{\text{(b) \{上・下\}}}$ に凸である．

(3) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能なとき，$f'(a) = 0$ であることは，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるための $\boxed{\text{(c) \{必要・十分・必要十分\}}}$ 条件である．

問2．次の関数の高次導関数を求めよ．　[3点 × 5]

(1) $y = 6x^4 + 7x^2 + 2x + 5$ の第3次導関数

(2) $y = \log x$ の第2次導関数

(3) $y = \cos 2x + \sin 2x$ の第2次導関数

(4) $y = x^2 \sin x$ の第4次導関数

(5) $y = e^{-x}$ の第 n 次導関数（ただし，n は正の整数）

問3．次の極限値を求めよ．　[3点 × 2]

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{2x + 1}{2x^2}$

問4．関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ について，次の各問に答えよ．
[(1) 3点，(2) 7点]

(1) y', y'' をそれぞれ計算せよ．

(2) 増減表をかき，極値と変曲点を求めよ．

極大値	$(x = \quad)$	極小値	$(x = \quad)$	変曲点	

問5．$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$\cos x \geqq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ．ただし，$0 < x < \pi$ で $x > \sin x$ であることは，証明せずに用いて良い．　[10点]

問題は裏面にもあります．

問 6．関数 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \geqq 0)$ について，次の各問に答えよ．

[(1) 3 点，(2) 7 点，(3) 5 点]

(1) y', y'' をそれぞれ計算せよ．

(2) 増減表をかき，極大値と変曲点を求めよ．

極大値	$(x = \quad\quad)$	変曲点	

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}$ を求めよ（答えのみでよい）．また，グラフの概形をかけ．

問 7．媒介変数（パラメータ）t によって表される関数：

$$x = t^3 - 2t^2 + 1\ ,\quad y = t^2 - t\ ,$$

について，$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ求めよ．ただし，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ に注意せよ．　[10 点]

問 8．円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の傾きを求めよ．　[5 点]

問 9．関数 $y = x^2$ のグラフについて，次の各問に答えよ．

[(1), (2) 3 点，(3) 6 点，(4) 5 点]

(1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式を書け．

(2) 曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における法線の方程式を書け．

(1) の直線は，

イ．曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) を通り，

ロ．傾きが関数 $y = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $2a$ に等しい

直線であるといえる．ここでは，次のような円を考えよう：

ハ．点 (a, a^2) を通り，この点における接線が (1) であり，

ニ．さらにこの点での $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値が関数 $y = x^2$ の $x = a$ における第 2 次導関数の値 2 に等しい．

この円は，曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) における接触円と呼ばれる．

(3) この円の方程式を $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ とおくと，条件ハ, ニは

$$(a-p)^2 + (a^2-q)^2 = r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$2(a-p) + 4a(a^2-q) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$2 + 8a^2 + 4(a^2-q) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

と書ける．p, q, r を a を用いて表せ．ただし，$r > 0$ とする．

(4) (2) の直線と曲線 $y = x^2$ 上の点 (b, b^2) における法線（ただし $b \neq a$, $b \neq 0$ とする）との交点の座標は

$$\left(-2ab(a+b), a^2 + ab + b^2 + \frac{1}{2}\right)$$

である．$b \to a$ の極限でこれが (p, q) となることを示せ．ただし，p, q は，(3) で求めたものである．

さらに，交点 (p, q) と点 (a, a^2) との距離は r に等しいことが示される．この距離のことを曲率半径という．(4) のようにして求めた点 (p, q) を中心とする半径 r の円は，曲率円と呼ばれ，接触円と一致することが知られている．

なお，曲率 (curvature) は曲率半径の逆数で計算され，

曲率㊫ $\iff$ 曲率半径㊩ $\iff$ "急カーブ"

曲率㊩ $\iff$ 曲率半径㊫ $\iff$ "緩やかなカーブ"

である．

問題は以上です．