2024年度　数学AI　定期試験　（実施日：2024年7月25日）

得点	100

2年＿組　整理番号：＿＿＿　氏名：解答例

注意： 試験時間は **100分** です．問2以降は，最終的な答えがどこか分かるように解答すること．それに至る過程も採点対象です．採点者に伝わるように書いてください．

問1．次の空欄に当てはまる語句・数式を答えよ．ただし (2), (3) は，{　} 内から適切なものを選び◯で囲むこと．　[3点 × 4]

(1) 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

と定義される．さらに $f'(x)$ も微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第2次導関数といい，$f''(x)$ などと表す．

(2) 関数 $f(x)$ が区間 $I=(a,b)$ で2回微分可能であるとき，

- I で $f'(x)>0$ ならば，
  $f(x)$ は I で単調に (a) {増加・減少} する；
- I で $f''(x)>0$ ならば，
  曲線 $y=f(x)$ は I で (b) {上・下} に凸である．

(3) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき，$f'(a)=0$ であることは，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための (c) {必要・十分・必要十分} 条件である．

問2．次の関数の高次導関数を求めよ．　[3点 × 5]

(1) $y=6x^4+7x^2+2x+5$ の第3次導関数

$y'=24x^3+14x+2$,　$y''=72x^2+14$,　$\underline{y'''=144x}$ //

(2) $y=\log x$ の第2次導関数

$y'=\dfrac{1}{x}$,　$\underline{y''=-\dfrac{1}{x^2}}$ //

(3) $y=\cos 2x+\sin 2x$ の第2次導関数

$y'=-2\sin 2x+2\cos 2x$,　$y''=-4\cos 2x-4\sin 2x$

$= \underline{-4(\cos 2x+\sin 2x)}$ //

(4) $y=x^2\sin x$ の第4次導関数

ライプニッツの公式を用いて，

$$y^{(4)} = 0+0+6\cdot 2(-\sin x)+4\cdot 2x(-\cos x)+1\cdot x^2\sin x$$

$$= \underline{(x^2-12)\sin x-8x\cos x}\ //$$

(5) $y=e^{-x}$ の第 n 次導関数（ただし，n は正の整数）

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ より，$\underline{y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}}$ //

問3．次の極限値を求めよ．　[3点 × 2]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \underline{\frac{1}{2}}\ //$$

（別解）

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= 1^2\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}\ //$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2x^2}$　　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2x^2} = \underline{\frac{3}{2}}$ //　　※　ロピタルの定理は使えない．

問4．関数 $y=x^3-6x^2+9x$ $(0\leqq x\leqq 4)$ について，次の各問に答えよ．　[(1) 3点，(2) 7点]

(1) y', y'' をそれぞれ計算せよ．

$y'=3x^2-12x+9 = \underline{3(x-1)(x-3)}$ //

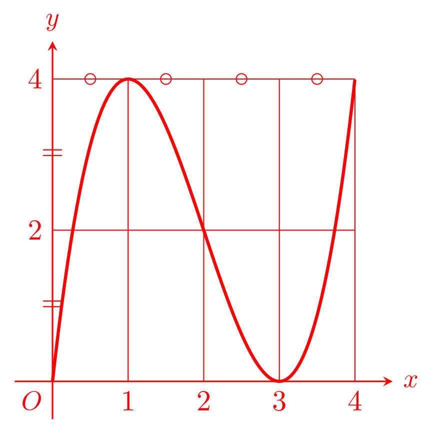
$y''=6x-12 = \underline{6(x-2)}$ //

(2) 増減表をかき，極値と変曲点を求めよ．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	0	↗	4	↘	2	↘	0	↗	4

極大値		極小値		変曲点	
4	$(x=1)$	0	$(x=3)$		$(2,2)$

※



問5．$0\leqq x\leqq\pi$ において，$\cos x\geqq 1-\dfrac{x^2}{2}$ を示せ．ただし，$0<x<\pi$ で $x>\sin x$ であることは，証明せずに用いて良い．　[10点]

$f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とおくと，$f(0)=0$．また，$0<x<\pi$ で

$$f'(x)=-\sin x+x>0$$

であるから，次表を得る：

x	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\pi^2}{2}-2$

上表より，関数 $f(x)$ の最小値は0であり，

$$f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}\geqq 0 \qquad \therefore\ \cos x\geqq 1-\frac{x^2}{2}.$$

∎

問題は裏面にもあります．

問 6. 関数 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \geqq 0)$ について，次の各問に答えよ．

[(1) 3 点，(2) 7 点，(3) 5 点]

(1) y', y'' をそれぞれ計算せよ．

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = \underline{(1-x)(1+x)e^{-\frac{x^2}{2}}}_{//}$$

$$y'' = -xe^{-\frac{x^2}{2}} - 2xe^{-\frac{x^2}{2}} + x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \underline{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^{-\frac{x^2}{2}}}_{//}$$

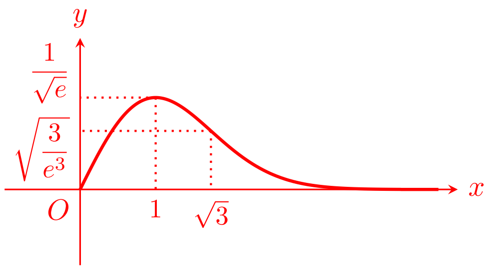
(2) 増減表をかき，極大値と変曲点を求めよ．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	$\sqrt{\frac{3}{e^3}}$	↘

極大値		変曲点	
極大値	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ $(x = 1)$	変曲点	$\left(\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{e^3}}\right)$

(3) $\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}$ を求めよ（答えのみでよい）．また，グラフの概形をかけ．

$\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \underline{0}_{//}$



※ $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$, $\sqrt{\frac{3}{e^3}} \approx 0.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$ である．また，$y'|_{x=0} = 1$.

問 7. 媒介変数（パラメータ）t によって表される関数：

$$x = t^3 - 2t^2 + 1\,, \quad y = t^2 - t\,,$$

について，$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ求めよ．ただし，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ に注意せよ． [10 点]

$t \neq 0, \frac{4}{3}$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \underline{\frac{2t-1}{3t^2-4t}}_{//}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{3t^2-4t} \cdot \frac{2(3t^2-4t)-(2t-1)(6t-4)}{(3t^2-4t)^2} = \underline{\frac{-2(3t^2-3t+2)}{(3t^2-4t)^3}}_{//}\,.$$

問 8. 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の傾きを求めよ． [5 点]

円 $x^2+y^2=r^2$ は，媒介変数 θ を用いて

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$$

と表わされる．よって，$y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta}{-r\sin\theta} = -\frac{x}{y}$$

であるから，求める接線の傾きは，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \underline{-\frac{x_0}{y_0}}_{//}\,.$$

(別解 1) $x^2+y^2=r^2$ を y について解くと，$y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$．よって $y>0$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{y}\,.$$

$y<0$ のときも同様に，$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ を得る．したがって，求める直線の傾きは・・・(以下同様)

(別解 2) 点 (x_0, y_0) を通る円の半径の傾きは，$\frac{y_0}{x_0}$ である．点 (x_0, y_0) における円の接線はこれに直交するので，$\underline{-\frac{x_0}{y_0}}_{//}$ (ただし $y_0 \neq 0$)．

(別解 3) $x^2+y^2=r^2$ の両辺を x で微分して， ☞ 3 年生数学 AI

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

であるから，求める接線の傾きは・・・(以下同様)

問 9. 関数 $y = x^2$ のグラフについて，次の各問に答えよ．

[(1), (2) 3 点，(3) 6 点，(4) 5 点]

(1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式を書け．

$\underline{y - a^2 = 2a(x-a)}_{//}$

(2) 曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における法線の方程式を書け．

$a \neq 0$ のとき，$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a)$

$a = 0$ のとき，$x = 0$ //

(1) の直線は，

イ．曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) を通り，

ロ．傾きが関数 $y = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $2a$ に等しい

直線であるといえる．ここでは，次のような円を考えよう：

ハ．点 (a, a^2) を通り，この点における接線が (1) であり，

ニ．さらにこの点での $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値が関数 $y = x^2$ の $x = a$ における第 2 次導関数の値 2 に等しい．

この円は，曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) における接触円と呼ばれる．

(3) この円の方程式を $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ とおくと，条件ハ，ニは

$$(a-p)^2 + (a^2-q)^2 = r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$2(a-p) + 4a(a^2-q) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$2 + 8a^2 + 4(a^2-q) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

と書ける．p, q, r を a を用いて表せ．ただし，$r > 0$ とする．

③より，$\underline{q = 3a^2 + \frac{1}{2}}_{//}$

これと②より，$\underline{p = -4a^3}_{//}$

以上と①より，$r = \sqrt{16a^6 + 12a^4 + 3a^2 + \frac{1}{4}} = \underline{\frac{1}{2}(4a^2+1)^{\frac{3}{2}}}_{//}$

(4) (2) の直線と曲線 $y = x^2$ 上の点 (b, b^2) における法線（ただし $b \neq a$, $b \neq 0$ とする）との交点の座標は

$$\left(-2ab(a+b), a^2+ab+b^2+\frac{1}{2}\right)$$

である．$b \to a$ の極限でこれが (p, q) となることを示せ．ただし，p, q は，(3) で求めたものである．

交点の x 座標と y 座標について，それぞれ極限を計算すると，

$$\lim_{b\to a}\left[-2ab(a+b)\right] = -4a^3 = p\,,$$

$$\lim_{b\to a}\left[a^2+ab+b^2+\frac{1}{2}\right] = 3a^2 + \frac{1}{2} = q\,.$$

よって，$b \to a$ の極限で

$$\left(-2ab(a+b), a^2+ab+b^2+\frac{1}{2}\right) \to (p, q)\,. \qquad ■$$

さらに，交点 (p, q) と点 (a, a^2) との距離は r に等しいことが示される．この距離のことを曲率半径という．(4) のようにして求めた点 (p, q) を中心とする半径 r の円は，曲率円と呼ばれ，接触円と一致することが知られている．

なお，曲率 (curvature) は曲率半径の逆数で計算され，

曲率㊅ $\Longleftrightarrow$ 曲率半径㊦ $\Longleftrightarrow$ “急カーブ”
曲率㊦ $\Longleftrightarrow$ 曲率半径㊅ $\Longleftrightarrow$ “緩やかなカーブ”

である．

問題は以上です．