みなさん，お久しぶりです．— 夏休みはどうでしたか？（私の感想は「短い！」です.）

数学の授業とは関係ないのですが，国際交流室員としての奈須田から，お願いがあります.

✎ 群馬高専では，今年度末の 3 月 16 日（日）〜3 月 23 日（日）にシドニーで短期海外語学研修を実施する予定です．つきましては，参加に関する希望調査を form で行うので，ご回答ください.

さて，後期の「数学 AII」を始める前に，2 点 確認です.

成績評価について　前期「数学 AI」同様，

［成績点 100 点］=［中間試験 100 点］× 0.4 +［定期試験 100 点］× 0.4 +［平常点 20 点］

として計算します．平常点は，毎回の課題の提出 $+\alpha$ によって評価されます.

課題提出について　提出期限を，**次の授業がある日の午前 8:30 まで** と変更します．提出方法はこれまでと同様，Teams 上で提出してください.

0　イントロダクション

0.1　微分の復習

関数 $y = f(x)$ の微分 (differential) dy は，

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{導関数 (derivative)}}\, dx\ .$$

例 1.　$f(x) = x^2$ の微分.

無視

$$\Delta\left(x^2\right) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - x^2 = 2x\Delta x + \cancel{(\Delta x)^2}$$

$$\therefore\quad \boxed{d\left(x^2\right) = 2x\,dx}$$

（別）　$\left(x^2\right)' = 2x$ だから，$d\left(x^2\right) = 2x\,dx$.

例 2.　$f(x) = \sin x$ の微分.

$$\begin{aligned}\Delta(\sin x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x &= \sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x \\ &= \sin x(\underbrace{\cos\Delta x}_{\approx 1} - 1) + \cos x\underbrace{\sin\Delta x}_{\approx \Delta x}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boxed{d(\sin x) = \cos x\,dx}$$

（別）　$(\sin x)' = \cos x$ だから，$d(\sin x) = \cos x\,dx$.

問題 0.1　次の関数を微分せよ．ただし，c, α は定数とする.　☞ 微分公式を復習しておくこと.

(1)　$y = c$　(2)　$y = x^\alpha$　(3)　$y = \cos x$　(4)　$y = e^x$　(5)　$y = \ln|x|$

〜微分法の大雑把なまとめ〜

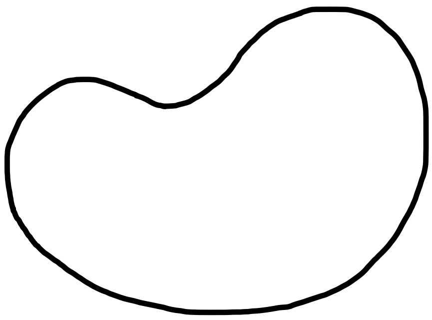
- 微分（differential）とは，微小な変化量のこと．
- 微分（differentiation）することの 意味 は，接線の傾きを求める（1 次近似する）ことで，

  その 計算方法 は，定義，あるいはそれから導いた諸公式による． ◇

0.2 微分法以前の求積法

◪ 水たまりの面積

以下の囲まれた部分の面積を求めるには，どうしたら良いだろうか？
※ ここでは，そもそも面積（あるいは体積）とは何か？ という議論には立ち入らない．



- 面積 1（＝基準）のタイル何枚分かを数える
- いくつかの長方形に分ける
-

  ⋮

重要なアイデア： 細かく分けて，足し合わせる！

◪ 四角錐の体積

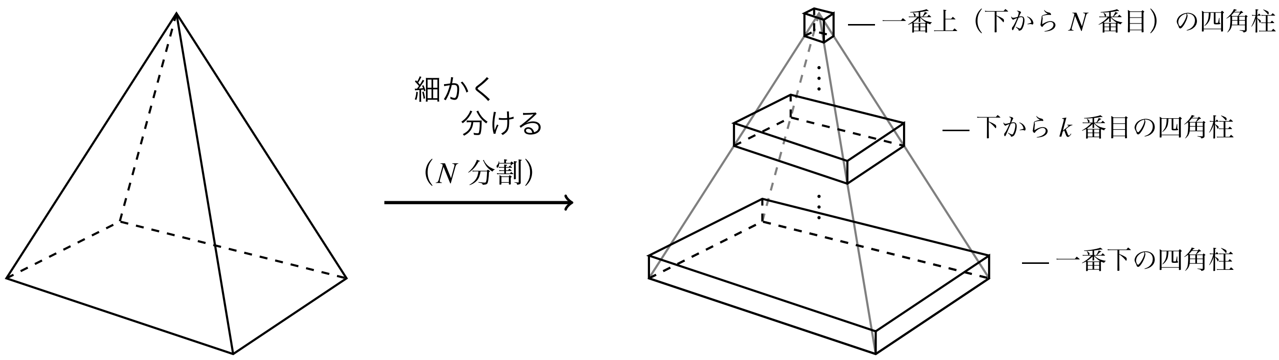
底面積 a，高さ h の四角錐の体積 V が，$V = \dfrac{1}{3}ah$ で求められることは，小学校で学習した．では，この公式はどのようにして導かれたのだろうか？ あるいは，なぜこの式が成り立つのだろうか？

— ここでは，「水たまりの面積」の考察で得られた教訓（lesson）：細かく分けて，足し合わせる，

というアイデアを使って考えてみよう．

小学校では，四角錐の容器と，これと同じ底面積と高さの直方体の容器とを使って，直方体の容器には四角錐の容器 3 杯分の水が入ることを実験で確かめて納得させられた... 筈．

四角錐を，下図のように，N 個の四角柱に分割して考える．



下から k 番目の四角柱は，底面積が $\left(\dfrac{N-k+1}{N}\right)^2 a$，高さが $\dfrac{h}{N}$ の四角柱で，その体積は

$$\frac{(N-k+1)^2}{N^3}ah$$

である．求めたい四角錐の体積は，この四角柱の体積を，$k=1$（一番下）から $k=N$（一番上）まで足し合わせたものにほぼ等しい．特に，四角柱の高さが“限りなくゼロに近づけば”（分割を細かくする；$N\to\infty$ に対応），その和は求めたい体積に等しくなると考えられる．すなわち，

$$\begin{aligned}
V &\approx \frac{1}{N}ah + \frac{(N-1)^2}{N^3}ah + \frac{(N-2)^2}{N^3}ah + \cdots + \frac{1}{N^3}ah = \sum_{k=1}^{N}\frac{(N-k+1)^2}{N^3}ah \\
&= \frac{ah}{N^3}\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)^2 = \frac{ah}{N^3}\sum_{j=1}^{N}j^2 = \frac{ah}{N^3}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\
&= \frac{1}{3}ah + \frac{1}{2N}ah + \frac{1}{6N^2}ah \quad \to \frac{1}{3}ah \quad (N\to\infty) \qquad\qquad \therefore\quad V = \frac{1}{3}ah\,.
\end{aligned}$$

問題 0.2　（Archimedes（アルキメデス）の方法）

放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 $A\,(\alpha,\alpha^2)$, $B\,(\beta,\beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ がある．線分 AB と放物線とが囲む図形を切片 AB と呼び，接線が AB に平行な放物線上の点 P をこの切片の頂点という．このとき

$$\triangle ABP = T_1$$

とする．（$\triangle ABP$ の面積を T_1 とする．）次に，切片 AP, PB の頂点をそれぞれ P_1, P_2 とおき

$$\triangle APP_1 + \triangle PBP_2 = T_2$$

とする．さらに，切片 AP_1, P_1P, PP_2, P_2B の頂点をそれぞれ P_3, P_4, P_5, P_6 とおき

$$\triangle AP_1P_3 + \triangle P_1PP_4 + \triangle PP_2P_5 + \triangle P_2BP_6 = T_3$$

とする．以下同様にして，$T_4, T_5, \ldots, T_n, \ldots$ を定める．

(1)　$T_2 = \dfrac{1}{4}T_1$ であることを示せ．

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ を T_1 を用いて表せ．

(3)　切片 AB の面積 S を α, β を用いて表せ．　　答：　$S = \dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

～ 積分法の概観 ～

- 積分（integral）とは，微小量を積み上げていくこと．
- 積分する（integration）ことの 意味 は，“面積”を求めることで， ☞ 定積分
  その 計算方法 は，微分計算の逆． ☞ 不定積分 ◇

1　積分法

1.1　概観（積分法の考え）

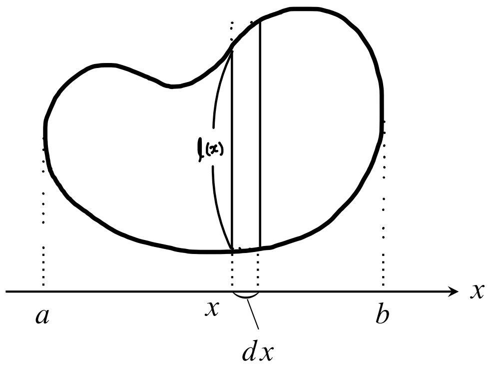
〜積分法の概観〜

- 積分(integral)とは，微小量を積み上げていくこと．　　— “細かく分けて，足し合わせる”
- 積分する(integration)ことの 意味 は，“面積”を求めることで，　☞ 定積分

　　その 計算方法 は，微分計算の逆．　☞ 不定積分　◇

◪ 例：水たまりの面積

まず初めに,「水たまりの面積」の問題を例に，積分法の定式化を見てゆこう．ここでは,「水たまりの面積」を S とおくことにする．

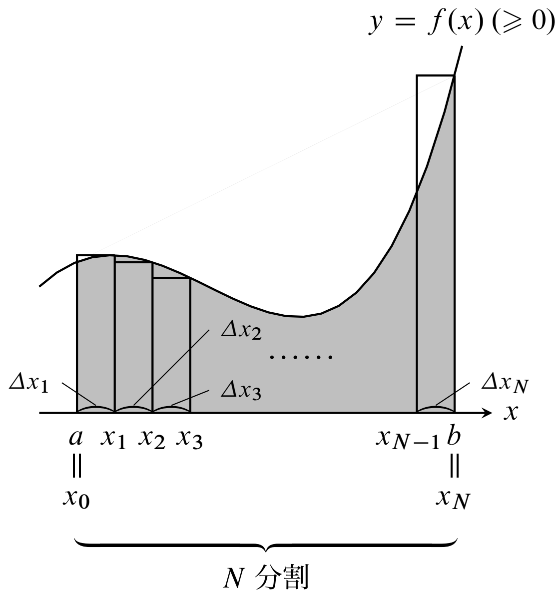


$$S = \left[\begin{array}{l}\text{微小長方形の面積 } \ell(x)\,dx \text{ を} \\ x = a \text{ から } x = b \text{ まで足し合わせる}\end{array}\right]$$

$$= \int_a^b \ell(x)\,dx \qquad \text{と書く．}$$

ここで，$\int$ はインテグラル (integral) や積分記号などと呼ばれ，S を縦に引き伸ばした記号である．

◪ Riemann(リーマン)和と定積分



左図のように，$y = f(x)$ のグラフと x 軸，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる面積を S とする．

また，区間 $[a, b]$ を N 個の小区間：

$$[a = x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ \ldots,\ [x_{N-1}, x_N = b]$$

に分割し，それぞれの区間の長さを

$$\Delta x_1\ ,\ \Delta x_2\ ,\ \ldots,\ \Delta x_N \qquad (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$$

と書く．

$$S \approx f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_N)\Delta x_N$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k \quad = S_\Delta \text{ とおく．}$$

(S_Δ のことを Riemann 和という．)

$N \to \infty$（$\Delta x_k \to 0$；十分細かく分割）のとき，

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_\Delta = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k = S \tag{$*$}$$

ならば（$f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能 (integrable) という），これを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き，$f(x)$ の a から b までの定積分 (definite integral) という．その値を求めることは，$f(x)$ を a から b まで積分する (integrate) といわれる．

$f(x)$ は被積分関数，a は下端，b は上端とそれぞれ呼ばれる．

また，このときの変数 x は積分変数と呼ばれ，束縛変数（ダミー(dummy)の変数）である：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\heartsuit)\,d\heartsuit = \cdots .$$

※　より厳密に考えるなら，

- $(*)$ はどのようなときに成立するのか？（必ず成立するのか？）
- 区間の分割の仕方（Δx_k のとり方）に決まりはあるのか？

　　$\vdots$

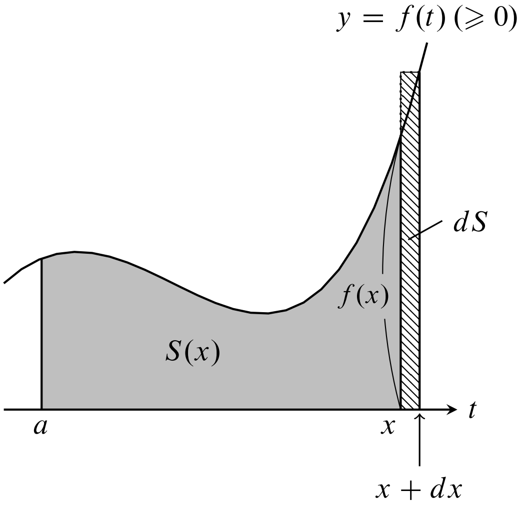
についても議論する必要がある．

★　では，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を計算するには，どうすればよいのか？

方法 1.　極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} f(x_k)\Delta x_k$ を計算する．

方法 2.　微分積分学の基本定理（以下）による．

◪ 定積分の計算方法と不定積分（微分積分学の基本定理）



左図のように，$y = f(t)$ のグラフと t 軸，直線 $t = a, t = x$ で囲まれる面積を $S(x)$ とおけば，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{である．}$$

このとき，x を $x + dx$ に微小変化させたときの $S(x)$ の微小変化 dS（▧の部分）を考える．

$$dS = f(x)\,dx \qquad \therefore \quad \frac{dS}{dx} = f(x)\,.$$

つまり，$S(x)$ を微分すると $f(x)$ になる．これを言い換えると，

$S(x)$ は，微分すると $f(x)$ になる関数の一つ※ である

※　微分して $f(x)$ になる関数は，無数にある．

といえる．よって，

$S(x)$ を求めるには，微分して $f(x)$ になる関数を一つ見つけることができればよい！

（このように微分して $f(x)$ になる関数の一つのことを $f(x)$ の原始関数 (primitive function) という．）

いま，$f(x)$ 原始関数として $F(x)$ が見つかったとすると，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + [x\ \text{によらない定数}]$$

と書ける．ここで，$x = a$ と選ぶと，$S(a) = 0$ であるから，

$$S(a) = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + [x\ \text{によらない定数}] = 0$$
$$\therefore \quad [x\ \text{によらない定数}] = -F(a)\,.$$

以上より，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)\,.$$

（$x = b$，x' を改めて x と書けば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

となる．）

【例題 1.1】

$S = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ の値を求めよ．

✍

問題 1.1　上の例題と同様に，2 通りの方法で $S = \displaystyle\int_0^1 x\,dx$ の値を求めよ．（答：$\dfrac{1}{2}$）

以上の議論を振り返ると，定積分の計算をするには，原始関数（微分して $f(x)$ になる関数の一つ）を見つけることが重要であった．そこで，微分して $f(x)$ になる関数を，定積分の記号を借用して

$$\int f(x)\,dx$$

と書き，$f(x)$ の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶことにする．

1.2 不定積分

関数 $f(x)$ について，微分して $f(x)$ になる関数のことを不定積分 (indefinite integral) といい，（定積分の記号を借用して）$\displaystyle\int f(x)\,dx$ と表す．

例． x の不定積分は？ ＝ 微分して x になる関数は？ — $\frac{1}{2}x^2$. （これだけ？）

$$\frac{1}{2}x^2+1 \text{ も } \frac{1}{2}x^2-5 \text{ も} \cdots \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2+C \quad \text{と表す．}$$

よって，

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C\ .$$

ここで，C は任意の定数で積分定数と呼ばれる．

以降この授業では，特に断らない限り，C は積分定数を表すものとする．

◪ 不定積分の公式①

微分公式（復習）

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \neq 0)$

  特に，$(x)' = 1$

- $(\sin x)' = \cos x$

  $(\cos x)' = -\sin x$

- $(e^x)' = e^x$

  $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

不定積分

- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

  特に，$\displaystyle\int 1\,dx = \int dx = x + C$

- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

  $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

  $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

【例題 1.2】

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

✍

★ **慣れるまでは，必ず 計算結果を微分して被積分関数に一致するか確認すること！**

問題 1.2　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

※　不定積分のことを逆微分 (antiderivative) ということもある．

問題 1.3　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$　（ヒント：$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$）　(2) $\displaystyle\int a^x\,dx$　（ヒント：$(a^x)' = a^x \ln a$）

問　次の不定積分を求めよ．　— 積分は微分よりも難しい？

(1) $\displaystyle\int \ln|x|\,dx$　（微分して $\ln|x|$ になる関数は？　☞　部分積分法．）

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$　（微分して $\tan x$ になる関数は？　☞　置換積分法．）

◪ $f(ax+b)$ と表される関数の不定積分

復習：　$\left[f(ax+b)\right]' = af'(ax+b)$

例えば，$(3x+2)^5$ を微分すると，$3\cdots5(3x+2)^4 = 15(3x+2)^4$．　（復習終わり）

【例題 1.3】

不定積分 $\displaystyle\int (2x+5)^3\,dx$ を求めよ．

✍　（ヒント：$\left(\dfrac{1}{4}u^4\right)' = u^3$）

※　$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき，$\boxed{\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$ となる．

このことは，$\left(\dfrac{1}{a}F(ax+b) + C\right)'$ を計算することで，直ちに分かる．　*cf.*　置換積分法．

問題 1.4　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos(3x+1)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int (4x+1)^4\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int e^{5x+2}\,dx$

◪ 不定積分の性質（線型性）

導関数の線型性

- $\big[f(x)+g(x)\big]' = f'(x)+g'(x)$
- $\big[kf(x)\big]' = kf'(x)$

まとめると，

$$\big[kf(x)+\ell g(x)\big]' = kf'(x)+\ell g'(x)$$

不定積分の線型性

- $\displaystyle\int \big[f(x)+g(x)\big]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

まとめると，

$$\int \big[kf(x)+\ell g(x)\big]\,dx = k\int f(x)\,dx + \ell\int g(x)\,dx$$

例. $\displaystyle\int (8x^3+60x^2+150x+125)\,dx =$ ✍

問題 1.5　次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $2x^3+3x^2-2x+5$　　(2) $3\cos x + 4e^x$

(3) $6\sin x + \dfrac{2}{x}$　　(4) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

◪ 不定積分の公式 ②

微分公式（復習）

- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

  $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

※ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

- $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

- $(\sinh x)' = \cosh x$,　$(\cosh x)' = \sinh x$

  $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

不定積分

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

  $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C \quad \big(\text{or}\ \ \cos^{-1} x + C\big)$

  $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

  ☞ 置換積分法.

- $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

  $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

  $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

- $(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

  $(\cosh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

  $(\tanh^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

※ $\sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,,\quad x \in \mathbb{R}$

$\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,,\quad x \in (1,\infty)$

$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,,\quad x \in (-1,1)$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right| + C$

  ☞ 置換積分法.

  $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

  ☞ 部分分数分解.

【例題 1.4】

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^2+4}\,dx$

✍

※　次の公式が成り立つ：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \qquad (A \neq 0)$$

問　以上を導出せよ.

問題 1.6　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$

問　次の不定積分を求めよ.　　☞ 置換積分法／部分積分法など.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$　　*cf.* $\displaystyle\int (x^2\pm a^2)\,dx$ はカンタン♪

【例題 1.5】

不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

✍

問題 1.7　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cot^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2+5\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

1.3　定積分

◪　定積分の計算

$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

であった．$F(b) - F(a)$ のことを $\Big[F(x)\Big]_a^b$ または $F(x)\Big|_a^b$ などと書くことがある．すなわち，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

などである．

例．$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \boxed{\frac{1}{3}}$　　*cf.*　例題 1.1

$\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$　　*cf.*　問題 1.1

問題 1.8　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx$

◪ 定積分の線型性

$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+C$, $\displaystyle\int g(x)\,dx = G(x)+C$ のとき，$\displaystyle\int \bigl[f(x)+g(x)\bigr]\,dx = F(x)+G(x)+C$ だから，

$$\begin{aligned}\int_a^b \bigl[f(x)+g(x)\bigr]\,dx &= \Bigl[F(x)+G(x)\Bigr]_a^b = \Bigl[F(x)\Bigr]_a^b + \Bigl[G(x)\Bigr]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\int kf(x)\,dx = kF(x)+C$ だから，

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= \Bigl[kF(x)\Bigr]_a^b = k\Bigl[F(x)\Bigr]_a^b \\ &= k\int_a^b f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

【例題 1.6】

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 (2x^2+3x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (5x^2+3x-4)\,dx$

✍

問題 1.9　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 (5x^3+3x^2-3x-2)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (3\sin x - 2\cos x)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 (e^x+e^{-x})\,dx$

【例題 1.7】

次の定積分の値を求めよ．

$\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^3+x^2+4x-3)\,dx$

✍

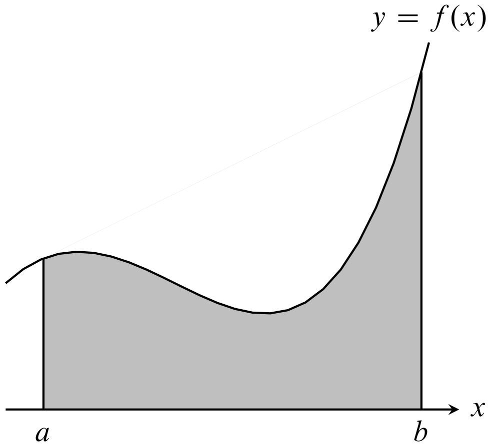
◪ 定積分と「符号付き面積」

$\underline{f(x) \geqslant 0, a \leqslant b \text{ のとき}}$，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は,

$y = f(x)$ のグラフと x 軸,

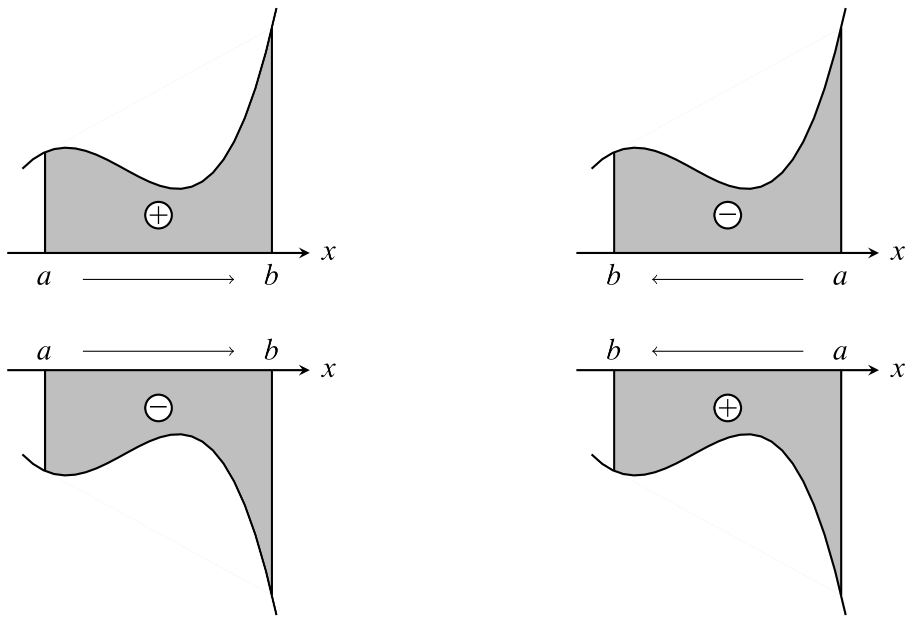
及び 2 直線 $x = a, x = b$

とで囲まれた部分の面積を表すのであった.



では，$f(x) < 0$ や $a > b$ のときはどう考えれば良いのだろうか？ あるいは，例題 1.6 (2) のように定積分の値が負になるとはどういうことだろうか？（面積は正の値の筈.）✍

ここで，これらを説明するために，面積の概念を拡張した「符号付き面積 (signed area)」の概念を導入しよう．符号付き面積とは，絶対値を面積の値として，以下の約束に従って符号を決めたものとする：



例.　$y = x$ のグラフと x 軸，直線 $x = \pm 1$ とで囲まれた部分の符号付き面積は，$\pm\dfrac{1}{2}$.

「符号付き面積」を用いると，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は,

$y = f(x)$ のグラフと x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b$ とで囲まれた部分の符号付き面積

である，といえる.

参考：ベクトルの内積と「符号付き長さ」

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\theta$$

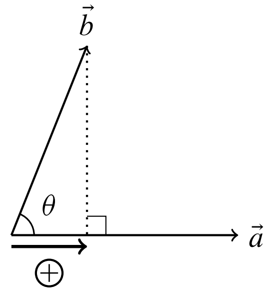
について考える．ただし，θ はベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角である．この右辺を，「$\left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right| \times \cos\theta$」という 3 つの数の積ではなく，

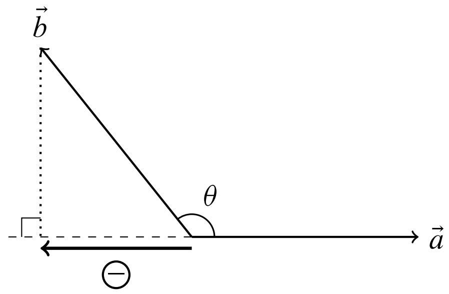
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right| \cos\theta$$

という 2 つの数「$\left|\vec{a}\right|$」と「$\left|\vec{b}\right| \cos\theta$」の積と見ることにしよう．このとき，

- $\left|\vec{a}\right|$ は $\vec{a}$ の大きさ（長さ）であり，
- $\left|\vec{b}\right| \cos\theta$ を「$\vec{b}$ の $\vec{a}$ に対する正射影の符号付き長さ」と呼ぶことにする．

符号付き長さは，絶対値を正射影の長さとして，以下の約束に従って符号を決めたものとする．





◪ 定積分の計算（続き）

【例題 1.8】

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ の値を求めよ．

✍

<u>問題 1.10</u>　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$　　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x^2+9}$

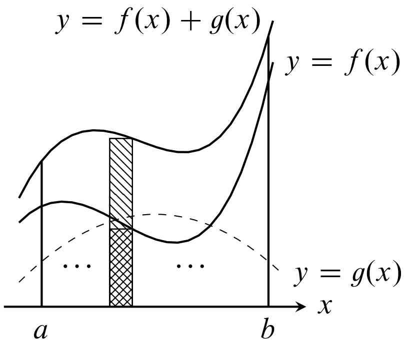
◪ 定積分の性質

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$　：線分の面積は 0.　　（*cf.*　第 1 週②の微積分学の基本定理の議論）

- 線型性：　$\displaystyle\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

  $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　　（☞　第 3 週①のプリント参照）

<u>説明</u>



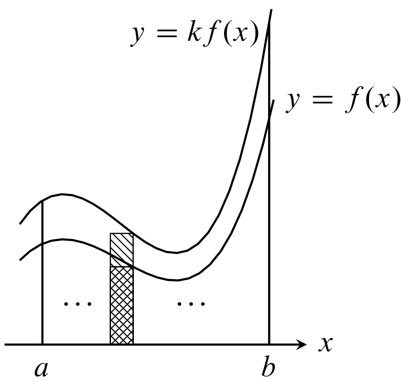
微小長方形の面積 $\big[f(x)+g(x)\big]\,dx$ は，

2 つの　〃　$f(x)\,dx$ と $g(x)\,dx$ の和.

それらを同じ $x=a$ から $x=b$ まで，それぞれ足し合わせるから，

$\displaystyle\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,dx$　も

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$　と　$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$　の和.



微小長方形の面積 $kf(x)\,dx$ は，

〃　$f(x)\,dx$ の k 倍.

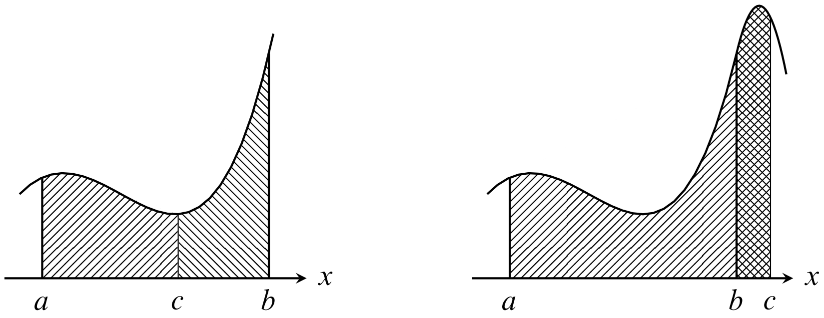
それらを同じ $x=a$ から $x=b$ まで，それぞれ足し合わせるから，

$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx$　も　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$　の k 倍.　◇

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ （*cf.*　第 3 週①の符号付き面積の約束）

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

  説明



etc. ◇

- $f(x)$ が偶関数，すなわち $y = f(x)$ のグラフが y 軸対称のとき，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x) \qquad \left(\because \quad \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx \right).$$

  $f(x)$ が奇関数，すなわち $y = f(x)$ のグラフが原点対称のとき，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \left(\because \quad \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx \right).$$

例.　$\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x^3 + x^2 + 4x - 3)\,dx =$ ✍

問題 1.11　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4x^3 - 3x^2 - 2x + 5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)\,dx$

- 単調性 （☞　次回の内容）

◪　定積分と面積

※　次の 2 つの問題を比較してみよう：

A. 定積分 $\displaystyle\int_1^2 (2x^2 + 3x)\,dx$ の値を求めよ．　*cf.*　例題 1.6 (1)

B. 区間 $[1, 2]$ において，$y = 2x^2 + 3x$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

★　問題文の表現（問われ方）は異なるが，これらは同じ意味の問題である．

ただし，以下の例題の (2), (3) のような場合には，注意が必要である．

【例題 1.9】

次の区間において，曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた面積を求めよ．

(1) $[0, \pi]$　　(2) $[\pi, 2\pi]$　　(3) $\left[0, \dfrac{3}{2}\pi\right]$

✍

問題 1.12　次の図形の面積を求めよ．

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と 2 直線 $x = 1, x = 3$，および x 軸で囲まれた図形

(2) 曲線 $y = e^x$ と両座標軸および $x = 2$ で囲まれた図形

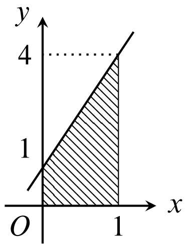
(3) 曲線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形

〜 どっちが楽？　積分計算 vs. 図形的に求める 〜

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)\,dx$

積分計算　$\displaystyle\int_0^1 (3x+1)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$

図形的



求める値は，左図の斜線部（台形）の面積だから，

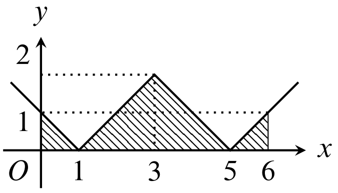
$$\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int_0^6 \big||x-3|-2\big|\,dx$

積分計算

$$\begin{aligned}\int_0^6 \big||x-3|-2\big|\,dx &= \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx + \int_3^5 (-x+5)\,dx + \int_5^6 (x-5)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_3^5 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 5x\right]_5^6 \\ &= \frac{1}{2} - 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{25}{2} - \frac{21}{2} - 12 + \frac{25}{2} = \boxed{5}\end{aligned}$$

図形的



求める値は，左図の斜線部の面積だから，

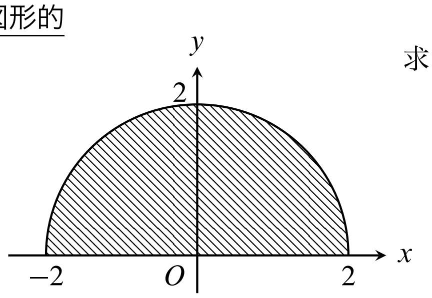
$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\boxed{5}$$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

積分計算

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2}=2\sin^{-1}1-2\sin^{-1}(-1)=\boxed{2\pi}$$

図形的



求める値は，左図の斜線部（半円）の面積だから，

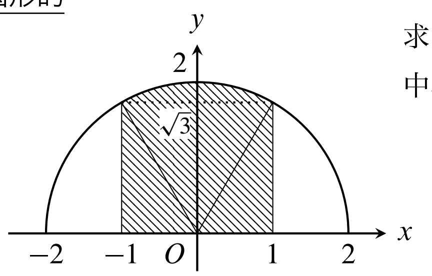
$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=\boxed{2\pi}$$

(3)' $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

積分計算

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\boxed{\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi}$$

図形的



求める値は，左図の斜線部の面積で，直角三角形 2 つと中心角 $60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$ の扇形とに分けて，

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}=\boxed{\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi}$$

注.　どちらが楽かは問題による（個人差もある）．さらに，必ず図形的に計算できるとは限らない．そのため，積分計算を基本として，図形的な計算はその方が簡単に計算できると知っている場合（あるいは検算）のみに用いるのが無難か．

【例題 1.10】

$a > 0, b > 0$ のとき，次の値の大小関係を調べよ．

$$\int_b^{b+1} \frac{dx}{\sqrt{x+a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+b}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$$

✍

◪ 定積分の単調性（定積分の大小関係）

区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqslant g(x)$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

※ 恒等的に $f(x) = g(x)$ でなければ，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$.

※ 逆：「$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$ のとき，区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqslant g(x)$」はいえない．

1.4 ここまでのまとめ：微積分学の基本定理

◪ 概観

求積問題 ➟ 符号付き面積 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ （定積分）

↑

一見，無関係

↓

微分の逆演算： $F(x) + C = \displaystyle\int f(x)\,dx \ \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}}\ F'(x) = f(x)$ （不定積分）

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

両者を結び付けるのが，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad あるいは \qquad \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

という関係式であった（☞ 第 1 週②）．これを微分積分学の基本定理 (the fundamental theorem of calculus) という．

以下では，微分積分学の基本定理を（第 1 週②のときよりも厳密に）導く．

◪ 定積分に関する平均値の定理

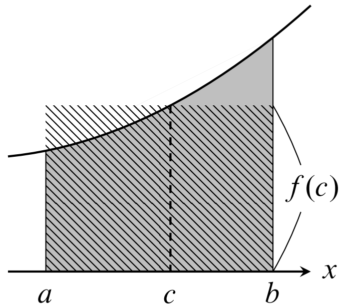
（証明は教科書 p. 91 を参照）

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \qquad i.e. \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \qquad (a<c<b)$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．

※　デコボコしてる $y=f(x)$ のグラフを，平ら（定数関数 $y=f(c)$）に“ならす”イメージ．
（あるいは，$y=f(x)$ のグラフの高さの“平均”をとっているイメージ．）



※　Lagrange の平均値の定理との関係

$S(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とする．$S(x)$ について Lagrange の平均値の定理を書き下すと，

$$\frac{S(b)-S(a)}{b-a} = S'(c) \qquad i.e. \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,.$$

これは，定積分に関する平均値の定理にほかならない．

◪ 微分積分学の基本定理の証明

$\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$ を計算する．ただし，$x, x+h\ (h\neq 0)$ は区間 $[a,b]$ 内の点である．

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx\,.$$

ここで，定積分に関する平均値の定理より，

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1)$$

とできる．よって，$h\to 0$ のとき，

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x+\theta h) \to f(x)\,,$$

すなわち，$S(x)$ は x で微分可能で $\dfrac{dS}{dx}=f(x)$ となる． ∎

省略しません.

教科書：「不定積分の積分定数 C を~~省略する~~.」

1.5 置換積分法：積分計算の技術 ①

◪ 合成関数の微分法の逆演算としての「置換積分法」

復習： 合成関数の微分法.

$y = f(u) = f(g(x))$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

つまり，微分して $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ になる関数は，$f(g(x))$ である． （復習終わり）

これの“逆”を考えると，$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$ なる不定積分の公式が得られる．この左辺について，$u = g(x), g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ であることを用いると，

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f'(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f'(u)\,du$$

と変形できる．置換積分法が有効なのは，$f'(g(x)) \cdot g'(x)$ という複雑な被積分関数が $f'(u)$ というシンプルな関数に置き換えられるからである．

以上より，（少し記号を整理して）次の置換積分法の公式を得る：

> $F'(u) = f(u), u = g(x)$ とすると，
>
> $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

※ 被積分関数が「$f(g(x)) \cdot g'(x)$」という型であれば，$u = g(x)$ とおいて，上の公式が使える．

【例題 1.11】

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int (4x+3)^5\,dx$

✍

問題 1.13 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (\sin^2 x + 1)\cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ (4) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

◪ 特に $f(u) = \dfrac{1}{u}$ の場合

$f(u) = \dfrac{1}{u}$ のとき，置換積分法の公式は，

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$$

となる．

※　これは，対数微分 $\dfrac{d}{dx}\ln|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の逆である．

例. $\displaystyle\int \tan x\,dx =$ ✍

問題 1.14　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cot x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5}\,dx$

◪ 定積分における置換積分法

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ の計算法を考えよう．

これまでの議論から，関数 $f(g(x))\cdot g'(x)$ の不定積分は $F(g(x)) + C$ とわかっているので，

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

である．ただし，実際の計算では，x を変数とした $F(g(x))$（複雑）ではなく，u を変数とした $F(u)$（シンプル）を使って計算することも多い．x が a から b まで変化するとき，

$u = g(x)$ は，$g(a)$（$= \alpha$ とおく）から $g(b)$（$= \beta$ とおく）まで変化する　　$(*)$

ことに注意して，

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u)\,du = \Big[F(u)\Big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

となる．

※　$(*)$ について，右のような対応表をかいておくと良い：

x	a	$\to$	b
u	α	$\to$	β

【例題 1.12】

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

✍

<u>問題 1.15</u>　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx$

◪ 置換積分法の variation（バリエーション）

以下，不定積分の置換積分法について記述する．定積分の場合も同様である．

<u>*Var. 1*</u>　$\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$　（$x = g(t)$ とおいた．）

※　$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ より，$dx = g'(t)\,dt$．

※　置換積分法の公式で，第 2 辺から第 1 辺に変形した，と考えればよい．

例 1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \quad (x = 2\sin\theta \text{ とおいた．})$$
$$= \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int d\theta = \theta + C = \boxed{\sin^{-1}\frac{x}{2} + C}$$
☞　例題 1.4 (1)

例 2. $$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad (x = 2\tan\theta \text{ とおいた．})$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{1}{2}\theta + C = \boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

例 3. $$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt \quad (\sqrt{x+1} = t \quad \therefore\ x = t^2-1\ \ (t \geqslant 0) \text{ とおいた．})$$
$$= \int (2t^3-2t^2)\,dt = \frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + C = \boxed{\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C}$$

cf.　$x + 1 = t$ とおいてもよい．

※　うまい変数変換によって，「$f(g(t))\cdot g'(t)$」の不定積分が簡単にわかるようになる場合がある．

$\longrightarrow$　どういう場合にうまくいくかは，上の例のような「定石」を学んで覚えていくしかない．

Var. 2 $$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\frac{1}{g'(x)}\,du \qquad （u = g(x) \text{ とおいた．}）$$
$$= \int f(u)\frac{1}{\frac{du}{dx}}\,du = \int f(u)\frac{dx}{du}\,du$$

例 1. $$\int (4x+3)^5\,dx = \int u^5 \cdot \frac{1}{4}\,du \qquad （u = 4x+3 \text{ とおいた．}）$$
$$= \frac{1}{4}\int u^5\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \boxed{\frac{1}{24}(4x+3)^6 + C}$$
☞ 例題 1.11 (2)

例 2. $$\int \tan^2 x\,dx = \int u^2\cos^2 x\,du \qquad （u = \tan x \text{ とおいた．}）$$
$$= \int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = \cdots ??$$
☞ 例題 1.5

※ 置換して積分が簡単になるとは限らない．

例 3. $$\int \sin^2 x\,dx = \int u^2\cdot\frac{1}{\cos x}\,du \qquad （u = \sin x \text{ とおいた．}）$$
$$= \int \frac{u^2}{\pm\sqrt{1-u^2}}\,du = \cdots ??$$

※ 置換して簡単になっていない．

1.6 部分積分法：積分計算の技術 ②

◪ 積の微分法の逆演算としての「部分積分法」 — *Integration by Parts*

復習： 積の微分法

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

（復習終わり）

この両辺を積分すると，

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) dx$$

$$\therefore\quad f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

よって，以下の部分積分法の公式が得られる：

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

または，（同じことであるが）

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

※ 被積分関数が2つの関数の積で表されるとき，「部分積分法が使えないかな？」と考える．

※ ただし，この公式を適用しても積分計算が完了するわけではない．部分積分法は，$\int f(x)g'(x)\,dx$ を，より簡単な $\int f'(x)g(x)\,dx$ に置き換える手法だと考えるべきである．

【例題 1.13】

不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を求めよ．

✍

例．$\int \ln x\,dx =$ ✍

問 $\int \ln(-x)\,dx = ?$

問題 1.16 次の不定積分を求めよ．

(1) $\int xe^x\,dx$ (2) $\int x\cos x\,dx$

(3) $\int x\ln x\,dx$ (4) $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$

【例題 1.14】

不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx$ を求めよ．

考え方　部分積分法を繰り返し用いる．　　*cf.*　テーブル法 “瞬間部分積分法”

✍

問題 1.17　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

◪ 定積分における部分積分法

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ の計算法を考えよう．

関数 $f(x)g'(x)$ の不定積分が $f(x)g(x) - \displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx$ となることから，

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right]_a^b = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

である．

【例題 1.15】

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

✍

問題 1.18　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

◪ 部分積分法 vs. 置換積分法 — どっちを使う？

部分積分法を使うか置換積分法を使うか，それが問題だ.

【例題 1.16】

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x(2x+3)^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$

考え方　(1) $\displaystyle\int \boxed{x(2x+3)^5}\,dx$

x と $(2x+3)^5$ の積，$2x+3=u$？，x の 6 次式，......

(2) $\displaystyle\int \boxed{\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}}\,dx$

x^2 と $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ の積，$x-1=u$？，$\sqrt{x-1}=u$？，......

✍

問題 1.19　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int 2x(2x-1)^7\,dx$

1.7 さまざまな積分計算

ここでは，さまざまな積分計算の手法を，被積分関数の型に着目しながら紹介してゆく.

◪ 多項式の割り算 → 積分計算

復習：　多項式の割り算

例.　$(4x^2+8x+5)\div(2x+3)=\dfrac{4x^2+8x+5}{2x+3}=2x+1+\dfrac{2}{2x+3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x \quad + 1 \\ \hline
2x+3 & \;4x^2+8x+5 \\
 & \;4x^2+6x \\ \hline
 & \qquad\quad 2x+5 \\
 & \qquad\quad 2x+3 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 2
\end{array}
$$

（復習終わり）

【例題 1.17】

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$ を求めよ.

考え方　$\displaystyle\int \boxed{\frac{x^3}{x-1}}\,dx$

分数関数，$\dfrac{(\text{高次})}{(\text{低次})}$，$x^3$ と $\dfrac{1}{x-1}$ の積，$x-1=u$？，……

✍

問題 1.20　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$ を求めよ.

◪ 部分分数分解 → 積分計算

復習：　部分分数分解（≒ 通分の逆）　例. $\displaystyle\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x-1} \overset{\text{通分}}{\underset{\text{部分分数分解}}{=}} \frac{x+5}{(x+2)(x-1)}$

（復習終わり）

【例題 1.18】

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$ を求めよ.

考え方　$\displaystyle\int \boxed{\frac{x}{(x+1)(x+2)}}\,dx$

分数関数，$\dfrac{(\text{低次})}{(\text{高次})}$，$x$ と $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ の積，……

✍

問題 1.21　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{(x-2)(x+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$　（ヒント：$\displaystyle\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{ax+b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$ の型に部分分数分解できる.）

※ 準公式　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a>0)$　　問　これを導出せよ.

例題 別解

[1.16 (1)] 気合いで展開！

（与式）

$$= \int (32x^6 + 240x^5 + 720x^4 + 1080x^3 + 810x^2 + 243x)\,dx$$

$$= \frac{32}{7}x^7 + \frac{240}{6}x^6 + \frac{720}{5}x^5 + \frac{1080}{4}x^4 + \frac{810}{3}x^3 + \frac{243}{2}x^2 + C$$

$$= \frac{32}{7}x^7 + 40x^6 + 144x^5 + 270x^4 + 270x^3 + \frac{243}{2}x^2 + C$$

[1.16 (2)] $x-1=u$ とおく

$u = x-1$ とおくと，$du = dx$ であるから，

（与式）

$$= \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C$$

部分積分・置換積分混合型（どっちも使う）

$$（与式） = \cdots = 2x^2\sqrt{x-1} - 4\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

ここで，$u = x-1$ とおくと，

（与式）

$$= 2x^2\sqrt{x-1} - 4\int (u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$= 2x^2\sqrt{x-1} - 4\int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})\,du$$

$$= 2x^2\sqrt{x-1} - \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2x^2\sqrt{x-1} - \frac{8}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2x^2\sqrt{x-1} - \frac{8}{5}(x^2-2x+1)\sqrt{x-1} - \frac{8}{3}(x-1)\sqrt{(x-1)} + C$$

$$= \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{16}{15}\right)\sqrt{(x-1)} + C$$

$$= \frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{(x-1)} + C$$

[1.17] $x-1=u$ とおく

$u = x-1$ とおくと，$du = dx$ であるから，

（与式）

$$= \int \frac{(u+1)^3}{u}\,du$$

$$= \int \frac{u^3+3u^2+3u+1}{u}\,du$$

$$= \int \left(u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{2}u^2 + 3u + \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + \ln|x-1| + C$$

[1.18] 部分積分をどうしても使いたいなら……

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$

である．よって，

（与式）

$$= \int x \cdot \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$= x\big(\ln|x+1| - \ln|x+2|\big) - \int (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\,dx$$

$$= x\big(\ln|x+1| - \ln|x+2|\big) - \big[(x+1)\ln|x+1| - (x+1)\big] + \big[(x+2)\ln|x+2| - (x+2)\big] + C$$

$$= -\ln(x+1) + 2\ln(x+2) + C$$

$$= \ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C$$

※ ほかにも計算の方針はいろいろあると思います．
自分が思い付いた方法を試してみてください．

◪ 三角関数を含む関数の積分

復習：　三角関数の諸公式（一部；次数下げ）

倍角公式　$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，　$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$，　$\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

積→和公式　$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big]$，

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big]$，　$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big]$

問　これらを導出せよ．　　　　（復習終わり）

【例題 1.19】

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 5x\cos 4x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

考え方　(1) $\displaystyle\int \boxed{\cos^2 x}\,dx$

$1-\sin^2 x$，三角関数の 2 次式，......

(2) $\displaystyle\int \boxed{\sin 5x\cos 4x}\,dx$

sin と cos の積（三角関数の 2 次式），$5x \neq 4x$，......

(3) $\displaystyle\int \boxed{\frac{1}{\sin x}}\,dx$

$(\sin x)^{-1} = \operatorname{cosec} x$，$\sin x = u$？，1 と $\dfrac{1}{\sin x}$ の積，......

★　$f(\cos x)\sin x$，$f(\sin x)\cos x$，$\dfrac{f(\tan x)}{\cos^2 x}$ の形を作る　⇒　置換積分．

✍

問題 1.22　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos 3x\sin 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos 4x\cos 3x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 5x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

◪ 無理関数の積分

※ 準公式

- $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0) \tag{1}$$
- $$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + A} + A \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right|\right) + C \qquad (A \neq 0) \tag{2}$$

【例題 1.20】

上の準公式 (1) を導出せよ．

✍

問題 1.23 上の準公式 (2) を導出せよ．

問 上の準公式 (1), (2) について，右辺を微分し，左辺の被積分関数と一致することを確かめよ．

【例題 1.21】

定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ の値を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

✍

問題 1.24 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

【例題 1.22】

定積分 $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx$ の値を求めよ．

✍

問題 1.25 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{x^2 - 4x + 5}\, dx$

※　**置換積分法の $\overset{\text{バリエーション}}{\textbf{variation}}$**　　　以下，不定積分について記述するが，定積分の場合も同様である．

Var. 1　$\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$　　（$x = g(t)$ とおいた．）

　※　$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ より，$dx = g'(t)\,dt$.

　※　置換積分法の公式で，第 2 辺から第 1 辺に変形した，と考えればよい．

例 1.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \qquad (x = 2\sin\theta \text{ とおいた．})$$
$$= \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int d\theta = \theta + C = \boxed{\sin^{-1}\frac{x}{2} + C}$$
☞　例題 1.4 (1)

例 2.
$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad (x = 2\tan\theta \text{ とおいた．})$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{1}{2}\theta + C = \boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

例 3.
$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt \qquad (\sqrt{x+1} = t \quad \therefore\ x = t^2-1\ (t \geqslant 0) \text{ とおいた．})$$
$$= \int (2t^3 - 2t^2)\,dt = \frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + C = \boxed{\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C}$$
cf.　$x + 1 = t$ とおいてもよい．

　※　うまい変数変換によって，「$f(g(t))\cdot g'(t)$」の不定積分が簡単にわかるようになる場合がある．
　$\longrightarrow$　どういう場合にうまくいくかは，上の例のような「定石」を学んで覚えていくしかない．

Var. 2
$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\frac{1}{g'(x)}\,du \qquad (u = g(x) \text{ とおいた．})$$
$$= \int f(u)\frac{1}{\dfrac{du}{dx}}\,du = \int f(u)\frac{dx}{du}\,du$$

例 1.
$$\int (4x+3)^5\,dx = \int u^5\cdot\frac{1}{4}\,du \qquad (u = 4x+3 \text{ とおいた．})$$
☞　例題 1.11 (2)
$$= \frac{1}{4}\int u^5\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \boxed{\frac{1}{24}(4x+3)^6 + C}$$

例 2.
$$\int \tan^2 x\,dx = \int u^2\cos^2 x\,du \qquad (u = \tan x \text{ とおいた．})$$
☞　例題 1.5
$$= \int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = \cdots ??$$
※　置換して積分が簡単になるとは限らない．

例 3.
$$\int \sin^2 x\,dx = \int u^2\cdot\frac{1}{\cos x}\,du \qquad (u = \sin x \text{ とおいた．})$$
$$= \int \frac{u^2}{\pm\sqrt{1-u^2}}\,du = \cdots ??$$
※　置換して簡単になっていない．

※　置換積分の定石（無理関数）

- $\sqrt{ax+b}$ があれば，$\sqrt{ax+b}=u$ とおく．
- $\sqrt{x^2+A}$ があれば，$x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく．

  $\sqrt{x^2+a^2}$ なら，$x=a\tan\theta$ や，　　▶ $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の利用．

  $x=a\sinh t$ とおくこともある．　　▶ $\sinh^2 t+1=\cosh^2 t$ の利用．
- $\sqrt{a^2-x^2}$ があれば，$x=a\sin\theta$ とおく．　　▶ $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ の利用．

◪ 部分積分を繰り返し用いて，同じ形を作る

cf. 問題 1.16 (3) で，x を微分に，$\ln x$ を積分に使って部分積分すると，

$$\int x\ln x\,dx = x(x\ln x - x) - \int 1\cdot(x\ln x - x)\,dx = x(x\ln x - x) - \int x\ln x\,dx + \int x\,dx$$

のように，元の積分と全く同じ形が現れる．そこで，$I = \displaystyle\int x\ln x\,dx$ とおけば，

$$I = x(x\ln x - x) - I + \int x\,dx \qquad \therefore\quad 2I = x(x\ln x - x) + \int x\,dx$$

$$\therefore\quad I = \frac{1}{2}x(x\ln x - x) + \frac{1}{4}x^2 + C = \underline{\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}$$

と計算できる．（諦めないことも重要！？）

問 次の不定積分を，部分積分法を用いて求めよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2 + A}\,dx$

◪ 「指数関数×三角関数」の積分

※ 準公式　a, b を 0 でない定数とする．

- $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \tag{1}$$
- $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \tag{2}$$

【例題 1.23】

上の準公式 (1) を導出せよ．

✍

問題 1.26　上の準公式 (2) を導出せよ．

問　上の準公式 (1), (2) について，右辺を微分し，左辺の被積分関数と一致することを確かめよ．

※　準公式 (1), (2) の別導出は，問題解答 [Math-A2_kotae.pdf] を参照．

問題 1.27　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{3x}\cos 4x\,dx$

◪ 漸化式の利用

【例題 1.24】

n を 0 以上の整数とし，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とする．このとき，次の (1), (2) が成り立つことをそれぞれ証明せよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，

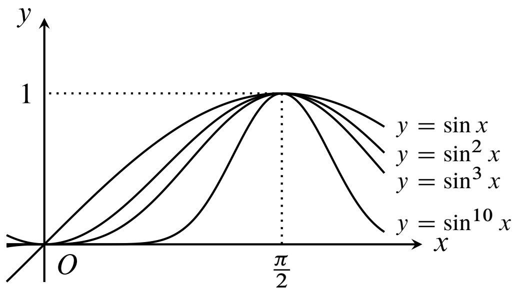
$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}.$$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = I_n$.

✍

※ $$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{(n-1)!!}{n!!}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{n-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}}$$

とも書ける．ただし，$n!!$ は二重階乗 (double factorial)，${}_n\mathrm{C}_r$ は n 個から r 個取る組合せの総数（二項係数）$\dfrac{n!}{r!(n-r!)}$ である． **問** このことを確認せよ．

※


問題 1.28 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$

問 I_0, I_1, I_2 の値を（上の例題の結果を用いずに）求めよ．

※ $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ は「Wallis（ウォリス）積分」と呼ばれる．

Wallis 積分から導かれる Wallis の公式や，それを発展させた Stirling（スターリン）の公式：

$$\text{十分大きな } n \text{ に対して，}\quad n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

は，離散量を連続量で近似する（見積もる）ために，統計分野などでしばしば用いられる．

✎ さまざまな積分計算に関しては，

池谷哲，数 III の積分計算が面白いほどわかる本，KADOKAWA (2016)

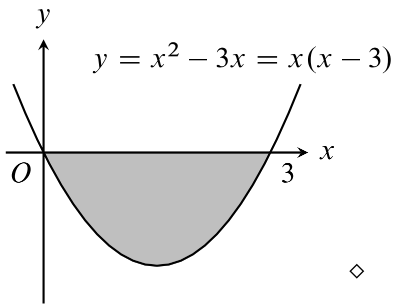
が，良い本だったのですが...... いまは絶版になってしまいました．

2　積分法の応用

〜概観〜

積分：　細かく分けて，足し合わせる　➠　面積・長さ・体積を求める．

2.1　複数のグラフで囲まれた部分の面積



復習：　曲線 $y = x^2 - 3x$ のグラフと x 軸とで囲まれた図形の面積 S は，

$$S = -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx = \frac{9}{2}$$

である．　◇

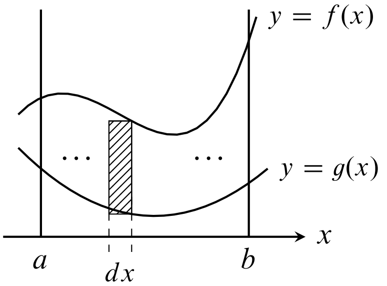
これは，次のようにも考えられる．S は $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = 0 \end{cases}$ の 2 つのグラフで囲まれた図形の面積で，これらのグラフは $x = 0, 3$ のときに交わるから，

$$S = \int_0^3 \{0 - (x^2 - 3x)\}\,dx = -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx = \frac{9}{2}\,.$$

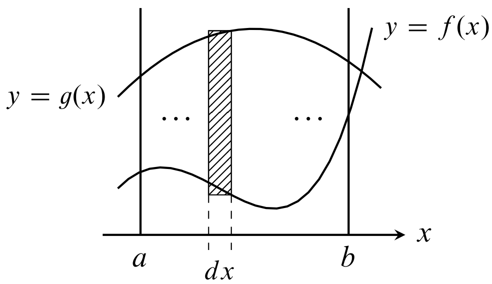
これを一般化すると，

> $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x = a$, $x = b$ $(a \leqslant b)$ で囲まれた図形の面積は，
>
> $$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx & (f(x) \geqslant g(x) \text{ のとき}) \\ \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx & (g(x) \geqslant f(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$
>
> で求まる．

※



$f(x) \geqslant g(x)$ のとき



$g(x) \geqslant f(x)$ のとき

Twitter（現 X）を見ていて，この言葉を思い出しました：

『かけ算をマスターするためには，割り算を勉強すればよい．』 ◇

さて，本題に入りましょう．前回の授業の最後で導いた，

> $y = f(x), y = g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x = a, x = b \ (a \leqslant b)$ で囲まれた図形の面積は，
>
> $$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx & (f(x) \geqslant g(x) \text{ のとき}) \\ \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx & (g(x) \geqslant f(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$
>
> で求まる．

を，具体例を通して実感・理解していくのが今日のテーマです．

【例題 2.1】

2 曲線 $y = x^2 - 1, y = -x^2 + 2x + 3$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

✍

問題 2.1　次の図形の面積を求めよ．

(1)　曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた図形

(2)　2 点 $(4, 2), (0, -2)$ を通る直線と曲線 $y = \sqrt{x}$ および y 軸で囲まれた図形

【例題 2.2】

2 曲線 $y = \sin x, y = \cos x \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ と 2 直線 $x = 0, x = \pi$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

✍

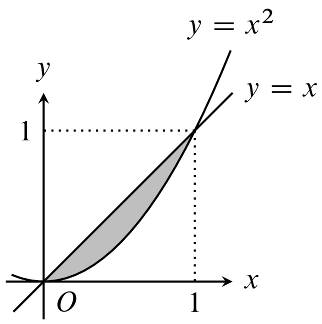
問題 2.2　次の図形の面積を求めよ．

(1)　2 曲線 $y = x^2, y = -x^2 + 2 \ (0 \leqslant x \leqslant 2)$ と 2 直線 $x = 0, x = 2$ で囲まれた図形

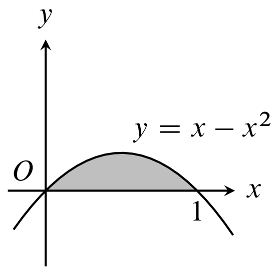
(2)　曲線 $y = \dfrac{2}{x}$ と 3 直線 $y = x - 1, x = 1, x = 4$ で囲まれた図形

問 以下の影を付けた部分の面積が等しいことを確かめよ．

(a)



(b)



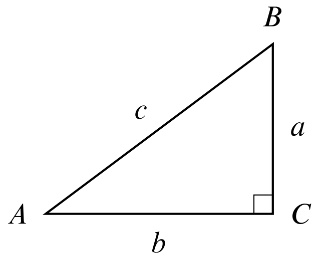
問 次の等式を証明せよ． *cf.* 問題 0.2，教科書 p.100 練習問題 1・B 大問 1

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \qquad \text{“1/6 公式”}$$

考え方 展開？ 置換積分？ 部分積分？

2.2　曲線の長さ

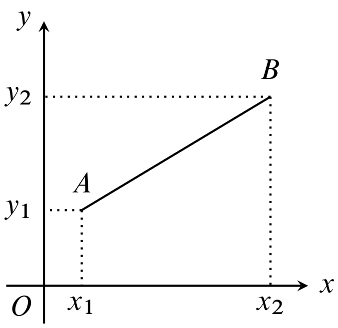
復習（Pythagoras（ピタゴラス）の定理；三平方の定理）　　$^*\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\acute{o}\rho\alpha\varsigma$



左図のような $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC において，以下が成り立つ：

$$c^2 = a^2 + b^2 \,. \qquad \diamond$$

復習（線分の長さ）



$A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ とする．線分 AB の長さ ℓ は，

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta x = x_2 - x_1, \\ \Delta y = y_2 - y_1}}{=} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

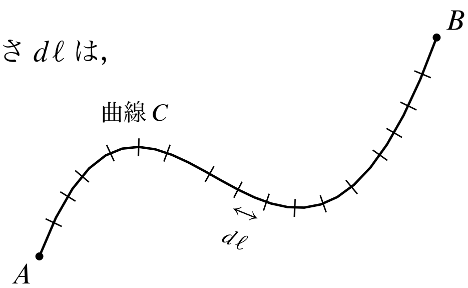
である．　$\diamond$

◪　曲線の長さ　　*cf.*　教科書 pp. 124–125

座標平面上の 2 点 A, B を結ぶ曲線（curve） C を考える．曲線 C は，方程式 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ で表されるとする（$f(x)$ は滑らか）．

このとき，曲線 C を N 分割（$N \to \infty$）した微小線分の長さ $d\ell$ は，

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



と表される．したがって，曲線 C の長さ（length） ℓ は，

$$\ell = \left[\begin{array}{l} \text{微小部分の長さ } d\ell \text{ を} \\ \text{点 } A \text{ から点 } B \text{ まで足し合わせる} \end{array}\right]$$

cf.　定積分の定義

$$= \int_A^B d\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \,.$$

【例題 2.3】

次の曲線の長さ ℓ を求めよ．

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

（カテナリー（catenary）；懸垂線）

✍

<u>問題 2.3</u>　カテナリー $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ の長さを求めよ．

問　カテナリー $y = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ $(-b \leqslant x \leqslant b)$ の長さを求めよ．ただし，$a, b > 0$ とする．

問 #　曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ の長さを求めよ．

【例題 2.4】

半径 r の半円の孤の長さを求めよ．

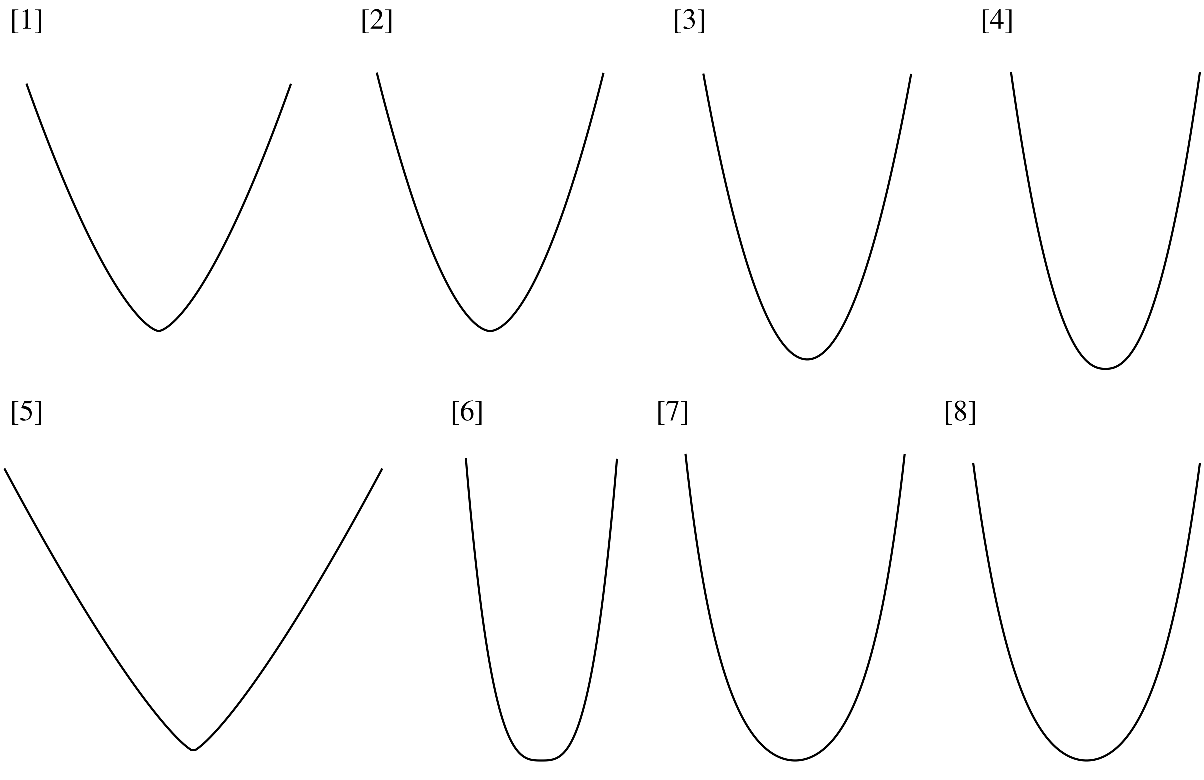
✍　答：　πr

<u>問題 2.4</u>　半径 r の円弧 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\left(-\dfrac{r}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{r}{2}\right)$ の長さを求めよ．

～おまけ～　“視力検査”

2 回連続で，Twitter ネタです．大昔 (?) の tweet で，こんな問題が出題されていました：

次の 8 個の曲線のうち 1 つだけ放物線がある．それはどれか．

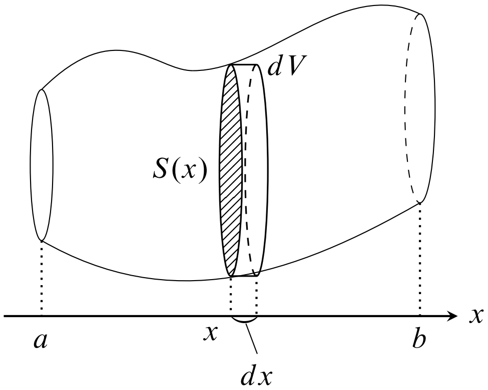


— みなさんは，答えがわかりますか？？

2.3　立体の体積

cf.　第 1 週①「四角柱の体積」

◪　一般の場合



左図の立体を考える．適当な方向に x 軸を設定し，立体の左端を $x = a$，右端を $x = b$ とする $(a < b)$．また，ある x において，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面の面積（断面積）が $S(x)$ であるとする．

この立体の体積 V は，x 軸に垂直な平面でこの立体を切り分けて微小な柱体（体積 $dV = S(x)\,dx$）に分割し，これを足し合わせることで求めることができる：

$$V = \left[\begin{array}{l}\text{微小な柱体の体積 } dV \text{ を} \\ x = a \text{ から } x = b \text{ まで足し合わせる}\end{array}\right] \qquad \textit{cf.}\ \text{定積分の定義}$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} dV = \int_a^b S(x)\,dx\,.$$

【例題 2.5】

底面が 1 辺の長さ a の正方形で，高さが h の正四角錐の体積 V を求めよ．

✍ 答：$\dfrac{1}{3}a^2 h$

<u>問題 2.5</u>　半径 r の直円柱がある．この円柱を，底面の直径 AB を通り底面と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす平面で切るとき，底面と平面の間の部分の体積 V を求めよ．

— まずは図示してみる．

※　立体の体積 $V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b S(t)\,dt$ は，

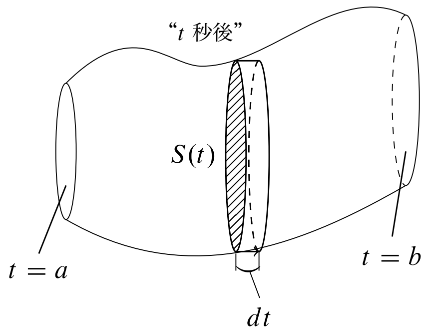
時刻 t での面積が $S(t)$ である曲面が，
$t = a$ から $t = b$ の間に通過した部分の体積

と考えることができる．

同様に，面積 $S = \displaystyle\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b s(t)\,dt$ は，

時刻 t での長さが $s(t)$ である曲線が，
$t = a$ から $t = b$ の間に通過した部分の面積

と考えられる．

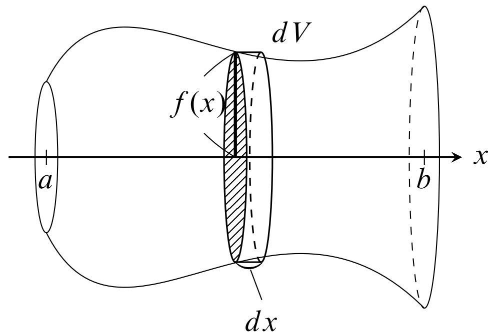


◪ 特に，回転体の場合

曲線 $y = f(x)$（$\geqslant 0$ とする）と x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ $(a < b)$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を考える．

ある x において，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積は，$S(x) = \pi f(x)^2$ であるから，この立体の体積 V は，

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx\,.$$



【例題 2.6】

半径 r の球の体積 V は公式 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ で求められることを証明せよ．

✍

問題 2.6　次の図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1)　曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形

(2)　曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ と x 軸で囲まれた図形

(3)　直線 $y = \dfrac{r}{h}x$ と x 軸および直線 $x = h$ で囲まれた図形（r, h は正の定数）

問題 2.7　曲線 $y = \ln x$ と y 軸および 2 直線 $y = -1, y = 1$ で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

問題 2.8　$0 < r < b$ とする．円 $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

問題 2.9　放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を，直線 $y = x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

問題 2.10　太さが等しい直交 2 円柱の共通部分の体積を求めよ．すなわち，$r > 0$ として，xyz 空間において

$$y^2 + z^2 \leqslant r^2\,,\quad z^2 + x^2 \leqslant r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ．

問　この立体の表面積は？

2.4 媒介変数表示された図形と長さ・面積・体積

◪ 媒介変数表示された曲線の長さ

cf. 例題 2.4：半径 r の半円の弧長

復習（曲線の長さ） 曲線 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ の長さ ℓ は，

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,. \qquad \left(\because \quad d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\right)$$

◇

曲線 C が，媒介変数（パラメータ）t を用いて

$$x = f(t)\,, \quad y = g(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

で表されるとき，この曲線の長さ ℓ を求めたい．まず，微小線分の長さ $d\ell$ について考える．

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

であるから，これを $t = \alpha$ から $t = \beta$ まで足し合わせて，

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt\,.$$

【例題 2.7】

a を正の定数とするとき，次のサイクロイドの長さ ℓ を求めよ．

$$x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

✍

問題 2.11 次の曲線の長さを求めよ．

(1) 円 $x = a\cos t, y = a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，$a$ は正の定数$)$

(2) 曲線 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$

◪ 媒介変数表示された曲線で囲まれた図形の面積

復習（定積分と面積） $y = f(x)$ のグラフと x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b$ $(a < b)$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b |y|\, dx\,.$$

◇

ここでは，曲線 $x = f(t), y = g(t)$ と x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b\ (a < b)$ で囲まれた部分の面積 S を求める方法を考えよう．このとき，微小長方形の面積は

$$|y|\,dx = |g(t)|\left|\frac{dx}{dt}\right|\,dt = \left|g(t)\frac{dx}{dt}\right|\,dt = |g(t)\,f'(t)|\,dt = \left|y\frac{dx}{dt}\right|\,dt$$

と表されるから，これを $x = a = f(\alpha)$ から $x = b = f(\beta)$ まで足し合わせて，

$$S = \int_\alpha^\beta |g(t)\,f'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \left|y\frac{dx}{dt}\right|\,dt\,. \tag{$*$}$$

【例題 2.8】

a を正の定数とするとき，サイクロイド

$$x = a(t - \sin t)\,,\quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

✍

問題2.12　次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　曲線 $x = 2t^2, y = t(1 - t)$　$(0 \leqslant t \leqslant 1)$

(2)　半円 $x = a\cos t, y = a\sin t$　$(0 \leqslant t \leqslant \pi$，$a$ は正の定数$)$

※　式 $(*)$ がそのまま使えるのは，区間 (α, β) で $f'(t)$ の符号が一定のときに限られる．

問　上の考え方を用いて，円

$$x = a\cos t\,,\quad y = a\sin t + a \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi，a \text{ は正の定数})$$

の面積 S を求めよ．

◪ 媒介変数表示された曲線からできる回転体の体積

復習（回転体の体積）　曲線 $y = f(x) \geqslant 0$ と x 軸および 2 直線 $x = a, x = b\ (a < b)$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx\ .$$
◇

ここでは，曲線 $x = f(t), y = g(t) \geqslant 0$ と x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b\ (a < b)$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求める方法を考えよう.

まず，微小円柱の体積を書き表そう．ある x において，x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ったときの断面積は，$S(x) = \pi g(t)^2$ である．微小高さ dx は,

$$dx = \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = |f'(t)|\, dt$$

であるから，微小円柱の体積は,

$$\pi g(t)^2 |f'(t)|\, dt = \pi y^2 \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$$

と表される．これを $x = a = f(\alpha)$ から $x = b = f(\beta)$ まで足し合わせて,

$$V = \pi \int_\alpha^\beta g(t)^2 |f'(t)|\, dt = \pi \int_\alpha^\beta y^2 \left|\frac{dx}{dt}\right| dt\ .$$

（面積のとき同様，上式がそのまま使えるのは，区間 (α, β) で $f'(t)$ の符号が一定のときに限られる.）

【例題 2.9】

a を正の定数とするとき，次のサイクロイドを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

$$x = a(t - \sin t)\ ,\quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

✍

問題 2.13　媒介変数表示 $x = a\cos t, y = a\sin t$（$0 \leqslant t \leqslant \pi$，$a$ は正の定数）で表される半円を x 軸のまわりに回転してできる球の体積を求めよ.

問題 2.14　媒介変数表示 $x = t^2, y = 1 - t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ で表される曲線と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転してできる球の体積を求めよ.

◪ 媒介変数表示された曲線からできる回転体の体積

復習（回転体の体積）　曲線 $y = f(x) \geqslant 0$ と x 軸および 2 直線 $x = a, x = b\ (a < b)$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx\ . \qquad \diamond$$

ここでは，曲線 $x = f(t), y = g(t) \geqslant 0$ と x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b\ (a < b)$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求める方法を考えよう．

まず，微小円柱の体積を書き表そう．ある x において，x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ったときの断面積は，$S(x) = \pi g(t)^2$ である．微小高さ dx は，

$$dx = \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = |f'(t)|\, dt$$

であるから，微小円柱の体積は，

$$\pi g(t)^2 |f'(t)|\, dt = \pi y^2 \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$$

と表される．これを $x = a = f(\alpha)$ から $x = b = f(\beta)$ まで足し合わせて，

$$V = \pi \int_\alpha^\beta g(t)^2 |f'(t)|\, dt = \pi \int_\alpha^\beta y^2 \left|\frac{dx}{dt}\right| dt\ .$$

（面積のとき同様，上式がそのまま使えるのは，区間 (α, β) で $f'(t)$ の符号が一定のときに限られる．）

【例題 2.9】

a を正の定数とするとき，次のサイクロイドを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

$$x = a(t - \sin t)\ , \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

✍

問題 2.13　媒介変数表示 $x = a\cos t, y = a\sin t$ （$0 \leqslant t \leqslant \pi$，$a$ は正の定数）で表される半円を x 軸のまわりに回転してできる球の体積を求めよ．

問題 2.14　媒介変数表示 $x = t^2, y = 1 - t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ で表される曲線と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

§ 極座標

◪ 座標とは

ある空間内で点の位置を表す（＝空間内の 1 点を指定する）には，どうしたらよいだろうか？

簡単のために，平面上の点について考えよう．平面上の 1 点を指定するためには，2 つの実数の組を与えればよい．例えば，今，自分が教室で座っている席は，「前から m 列目，右から n 列目」と言えば，特定できる．この (m, n) という 2 つの実数の組によって，自分の席の位置が表されている．

例．　クラスの座席，京都の街並み，マンションの部屋番号，緯度と軽度 *etc.*

自分の席の位置の表し方は，必ずしも「前から〜，右から〜」である必要はない．「後ろから m' 列目，左から n' 列目」などとしてもよい．ただし，位置の表し方を変えたら，位置を表す実数の組も変わってしまう．そのため，どの表し方を選んだか？ という情報も重要である．ある表し方を選んだときの 2 つの実数の組のことを，座標 (coordinates) という．

では，以下のような街では，どのように位置（＝現在地，住所）を表現するのが便利だろうか？

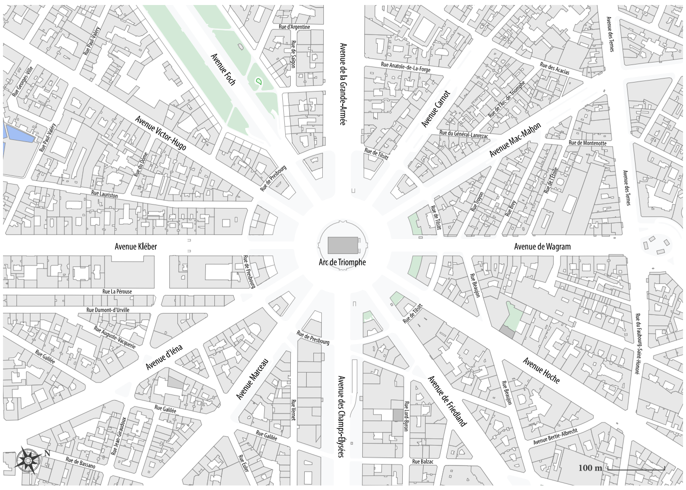
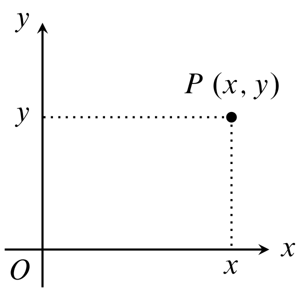


図:　フランス・パリにあるシャルル・ド・ゴール広場周辺の地図（左）と航空写真（右）．
［出典：https://fr.wikipedia.org/wiki/Place_Charles-de-Gaulle］

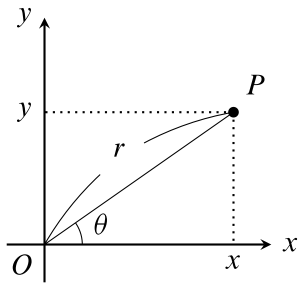
◪ 直交座標と極座標



小学校以来，我々が用いてきたのは，直交する 2 軸（x 軸と y 軸）を定めて平面上の位置を指定する方法である．このときの座標 (x, y) は，直交座標またはデカルト座標 (Cartesian coordinates) と呼ばれる．

他方，点 P の位置を

- OP 間の距離 r（動径 (radius) と呼ぶ）
- x 軸正の向きと動径のなす角 θ（偏角 (argument) と呼ぶ）



の 2 つの実数を用いて (r, θ) と表すこともできる．これを極座標 (polar coordinates) という．

右上図より，(x, y) と (r, θ) との間には，以下の関係が成り立つ：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} .$$

【例題 2.10】

(1) 直交座標が $(1, 1)$ である点 P の極座標を求めよ．また，直交座標が $(-2, -2)$ である点 Q の極座標を求めよ．

(2) 極座標が $\left(2, \dfrac{2}{3}\pi\right)$ である点 R の直交座標を求めよ．

✍

問題 2.15　次の直交座標をもつ点の極座標を求めよ．

(1) $(\sqrt{3}, 1)$　　(2) $(1, -1)$　　(3) $(-\sqrt{3}, -1)$

問題 2.16　次の極座標をもつ点の直交座標を求めよ．

(1) $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2) $(\sqrt{3}, \pi)$　　(3) $\left(4, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

※　直交座標が (x, y) である点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を考える．この点の極座標は (r, θ) と表されるとする．このとき，$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて，$\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\vec{e}_r\ , \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} .$$

また，$\vec{e}_r$ に直交する単位ベクトルを $\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．

※　直交座標と極座標以外にも，自然座標，斜交座標など，様々な座標が知られている．どの座標を用いるかは，その都度，最も便利なものを選べばよい．

◪ 図形と極方程式

ある曲線が極座標 (r, θ) に関する方程式 $r = f(\theta)$ や $g(r, \theta) = 0$ で表されるとき，この方程式を曲線の極方程式という．

簡単な例．$r = 1$ は，原点を中心とする半径 1 の円を表す．
$r = 0$ は，（任意の θ について）原点 O を表す．
$\theta = 0$ は，原点を端として点 $\underbrace{(1, 0)}_{\text{極座標}}$ を通る半直線．（しばしば 始線と呼ばれる．）

問題 2.17　次の方程式で表される点全体はどのような図形になるか．

(1)　$r = 3$　　　　(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　$(r \geqslant 1)$

以下では，特に，$r = f(\theta)$ と r が θ の関数として表されている場合について考える．この曲線が描く図形（＝極座標が $(f(\theta), \theta)$ である点全体の集合）のことを，関数 $r = f(\theta)$ のグラフという．

cf.　関数 $y = f(x)$ に対して，直交座標が $(x, f(x))$ である点全体の集合のことを，関数 $y = f(x)$ のグラフと呼んでいる．

【例題 2.11】

a を正の定数とするとき，次の関数のグラフの概形をかけ．

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

✍

問題 2.18　次の関数のグラフの概形をかけ．

(1)　$r = \dfrac{\theta}{\pi}$　$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$　　　　(2)　$r = 2\sin^2\theta$　$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

※　問題 2.7 (1) のように，極方程式 $r = a\theta$ で表される曲線は，アルキメデス (Archimedes) スの螺旋と呼ばれている．

問　2 次曲線（楕円，放物線，双曲線）を表す関数 $r = f(\theta)$ を求めよ．

【例題 2.11】

a を正の定数とするとき，次の関数のグラフの概形をかけ．

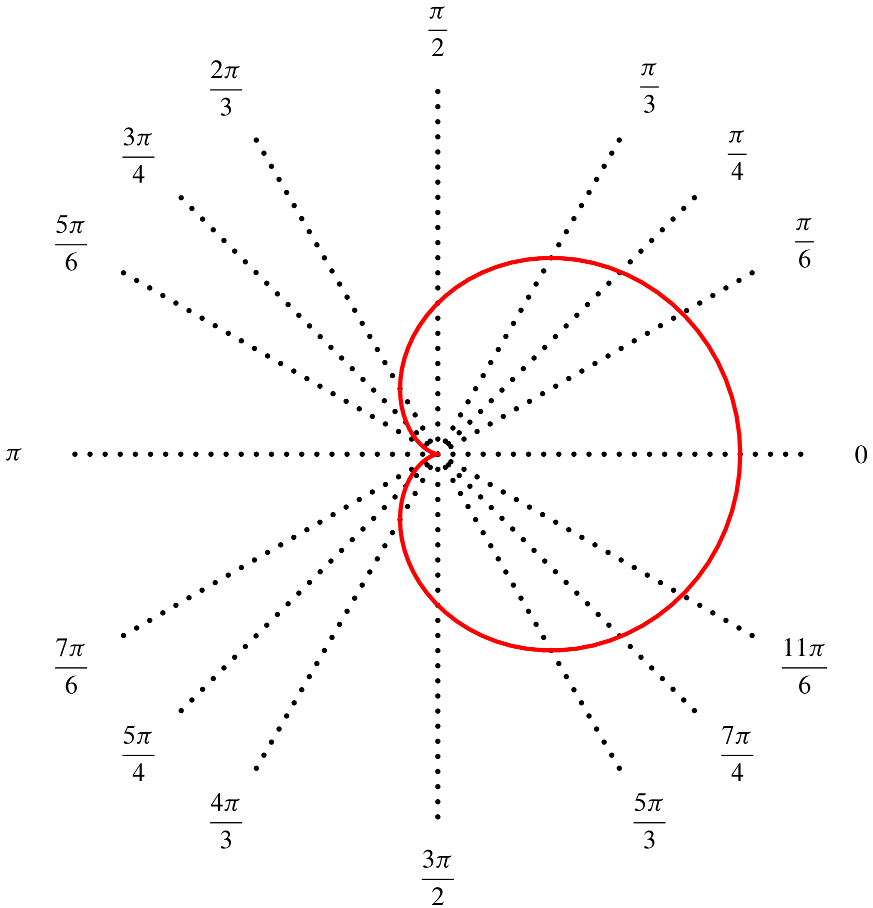
$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

考え方

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$2a$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$	0	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a	$\frac{3}{2}a$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$	$2a$
	$2a$	$1.87a$	$1.71a$	$1.5a$	a	$0.5a$	$0.29a$	$0.13a$	0	$0.13a$	$0.29a$	$0.5a$	a	$1.5a$	$1.71a$	$1.87a$	$2a$

解 答　上の表より，下図を得る．

⇨注　この曲線をカージオイド（心臓形）という．



2.5　極座標表示された図形と長さ・面積・体積

◪　極座標表示された曲線の長さ

復習（曲線の長さ）　$x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ で表される曲線の長さ ℓ は，

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt\ . \qquad \left(\because\quad d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt\right)$$

◇

曲線 C が，極方程式：

$$r = f(\theta) \qquad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

で表されるとき，この曲線の長さ ℓ を求めたい．まず，微小線分の長さ $d\ell$ について考える．

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(r\cos\theta) = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta + r(-\sin\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\ ,$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(r\sin\theta) = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

であるから，

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)^2}\, d\theta$$
$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta\ .$$

これを $\theta = \alpha$ から $\theta = \beta$ まで足し合わせて，

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta\ .$$

【例題 2.12】

a を正の定数とするとき，次のカージオイドの長さ ℓ を求めよ．

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

✍

問題 2.19　次の曲線の長さを求めよ．

(1)　$r = \sin\theta + \cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{4}\pi\right)$　　(2)　$r = \sin^3\frac{\theta}{3} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi)$

※　(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ である．

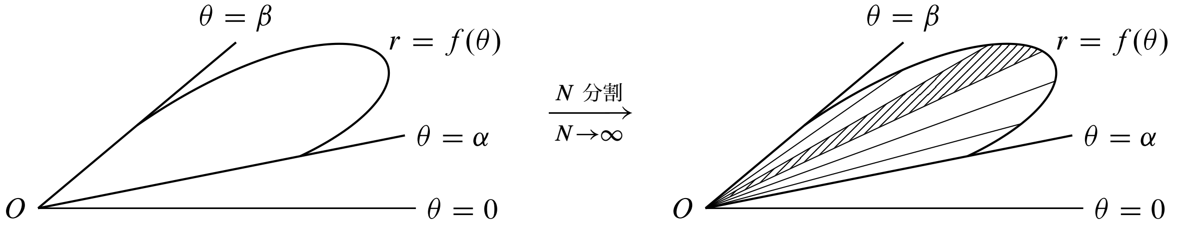
(2)　この曲線は，点 $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ を “2 回通る” が，長さの計算には関係ない．

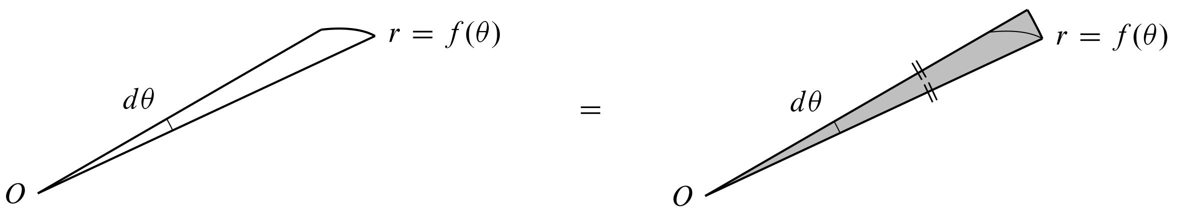
◪ 極座標表示された曲線で囲まれた図形の面積

復習（定積分と面積）　$y = f(x)$ のグラフと x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b$ $(a < b)$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b |y|\, dx\ . \qquad \diamond$$

　ここでは，曲線 $r = f(\theta)$ と 2 つの半直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ で囲まれた部分の面積 S を求める方法を考えよう．





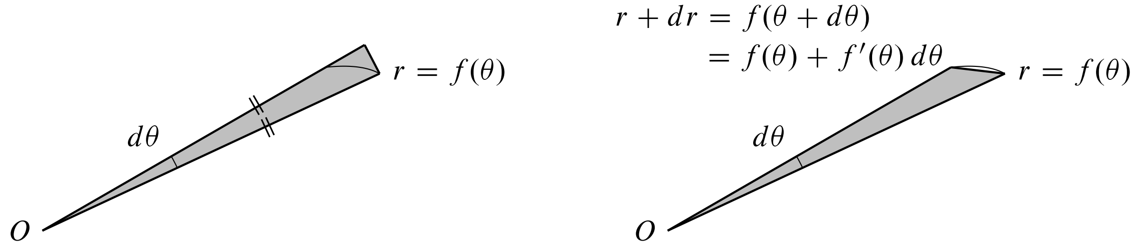
このとき，微小扇形の面積は

$$\frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2} f(\theta)^2\, d\theta \qquad \textit{cf.}\ \ \text{扇形の面積公式}$$

と表されるから，これを $\theta = \alpha$ から $\theta = \beta$ まで足し合わせて，

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\, d\theta\ .$$

※　以下のような微小三角形を考えても良い（がその必要はない）：



$$\frac{1}{2} r^2 \sin(d\theta) = \frac{1}{2} r^2\, d\theta \qquad\qquad \frac{1}{2} r(r + dr)\sin(d\theta) = \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

【例題 2.13】

a を正の定数とするとき，カージオイド

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

で囲まれた図形の面積を求めよ．

✍

問題 2.20　次の図形の面積を求めよ．

(1)　曲線 $r = 2\theta\left(\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi\right)$ と半直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \theta = \pi$ で囲まれた図形

(2)　$r = e^{-\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ と半直線 $\theta = 0, \theta = \pi$ で囲まれた図形

(3)　$r = |\sin 2\theta| \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ で囲まれた図形

◪　極座標表示された曲線からできる回転体の体積

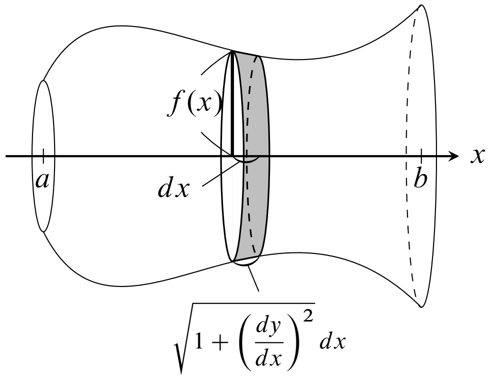
... は，教科書にはないようですね．問題を 1 問，載せておきます．

問題 2.21

曲線 $r = 2 + \cos\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

2.6　回転体の表面積 †

教科書になかったのですっかり忘れていましたが，回転体の表面積も積分によって求めることができます．ここでは，曲線 $y = f(x) > 0\ (a \leqslant x \leqslant b)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の表面積の求め方を考えます（媒介変数表示，極座標表示の場合も同様です）．



ある x において x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ったときの断面を 1 つの底面とし，$x + dx$ で x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ったときの断面をもう 1 つの底面とする高さ dx の微小立体を考える．この微小立体の側面積は

$$\begin{aligned}
&\pi(y+dy)^2\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} - \pi y^2\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \\
&\quad = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

と書ける．これを $x = a$ から $x = b$ まで足し合わせて，

$$\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,.$$

※　体積を求めたときと同じ微小円柱を考えて，その側面積の和，としては**いけない**．

【例題 2.14】

半径 r の球の表面積 S は公式 $S = 4\pi r^2$ で求められることを証明せよ．

解 答　半径 r の球は，曲線 $y = \sqrt{r^2 - x^2}\ (-r \leqslant x \leqslant r)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である．$y' = \dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ であるから，

$$\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx\,.$$

よって，

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi r\int_{-r}^{r}dx \\
&= 2\pi r\Big[x\Big]_{-r}^{r} = 2\pi r\cdot 2r = \underline{4\pi r^2}
\end{aligned}$$

➡注　半径 r の球の体積 V と表面積 S との間には，$\dfrac{dV}{dr} = S$ という関係がある．

よいお年を．

2.7 これまでのまとめ

◪ 公式（常識？）

面積：
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \qquad (y = f(x),\ y = g(x) \text{ で囲まれた})$$

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b |y|\, dx \qquad (y = f(x) \text{ と } x \text{ 軸で囲まれた})$$

$$S = \int_\alpha^\beta \left| y \frac{dx}{dt} \right| dt \qquad (\text{媒介変数表示})$$

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2\, d\theta \qquad (\text{極座標表示})$$

長さ：
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (y = f(x))$$

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (\text{媒介変数表示})$$

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (\text{極座標表示})$$

非回転体の体積：
$$V = \int_a^b S(x)\, dx \qquad (S(x) \text{ は } x \text{ での断面積})$$

回転体の体積：
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx \qquad (y = f(x))$$

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2 \left| \frac{dx}{dt} \right| dt \qquad (\text{媒介変数表示})$$

"Divide each difficulty into as many parts as is feasible and necessary to resolve it." — Rene Descartes

◪ 問題 — 今日は，"（ほぼ）計算不要" です．

問題： 次の量（面積・長さ・体積）を求める式を立てよ．

1. 区間 $[\pi, 2\pi]$ において，曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた図形の面積．
2. 曲線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積．
3. 曲線 $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ と x 軸で囲まれた図形の面積．

4. 2 曲線 $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 + 2x + 3$ で囲まれた図形の面積.
5. 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた図形の面積.
6. 2 曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ と 2 直線 $x = 0$, $x = \pi$ で囲まれた図形の面積.
7. 2 曲線 $y = x^2$, $y = -x^2 + 2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ と 2 直線 $x = 0$, $x = 2$ で囲まれた図形の面積.
8. 曲線 $y = \dfrac{2}{x}$ と 3 直線 $y = x - 1$, $x = 1$, $x = 4$ で囲まれた図形の面積.
9. 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ の長さ.
10. カテナリー $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ の長さを求めよ.
11. 半径 r の円弧 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\left(-\dfrac{r}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{r}{2}\right)$ の長さ.
12. 底面が 1 辺の長さ a の正方形で，高さが h の正四角錐の体積.
13. 半径 r の直円柱を，底面の直径 AB を通り底面と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす平面で切るとき，底面と平面の間の部分の体積.
14. 半径 r の球の体積.
15. 曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積.
16. 曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積.
17. 直線 $y = \dfrac{r}{h}x$ と x 軸および直線 $x = h$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積.（r, h は正の定数）
18. 2 つの放物線 $y = x^2 - 4x + 3$, $y = -x^2 + 3$ で囲まれた図形の面積.
19. 曲線 $y = \dfrac{1}{3}x^3$ と直線 $y = 3x$ で囲まれた図形の面積.
20. 曲線 $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ の長さ.
21. x 軸上の点 x $(0 < x < 1)$ で x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口が半径 $x(1 - x)$ の半円である立体の体積.
22. 曲線 $y = e^{2x}$ と両座標軸および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積.
23. 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ と x 軸および直線 $x = -2$ と $x = 2$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積.

24. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積．（a, b は正の定数）
25. 直線 $y = r - \dfrac{r}{h}x$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積．（r, h は正の定数）
26. 曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln x$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$ の長さ．
27. 曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ の長さ．
28. 曲線 $y = \dfrac{1}{6}\sqrt{x}(4x-3)$ $(1 \leqslant x \leqslant 4)$ の長さ．
29. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積．
30. サイクロイド $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ と x 軸で囲まれた図形の面積．（a は正の定数）
31. 曲線 $x = 2t^2,\ y = t(1-t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ と x 軸で囲まれた図形の面積
32. 半円 $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ と x 軸で囲まれた図形の面積．（a は正の定数）
33. 円 $x = a\cos t,\ y = a\sin t + a$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ の面積．（a は正の定数）
34. サイクロイド $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ の長さ．
35. 円 $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ の長さ．（a は正の定数）
36. 曲線 $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t\quad \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ の長さ．
37. サイクロイド $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積．（a は正の定数）
38. 半円 $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる球の体積．（a は正の定数）
39. 曲線 $x = t^2,\ y = 1 - t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積．
40. カージオイド $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ で囲まれた図形の面積．（a は正の定数）
41. 曲線 $r = 2\theta\ \left(\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi\right)$ と半直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \theta = \pi$ で囲まれた図形の面積．
42. 曲線 $r = e^{-\theta}\quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ と半直線 $\theta = 0,\ \theta = \pi$ で囲まれた図形の面積．
43. 曲線 $r = |\sin 2\theta|\quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ で囲まれた図形の面積．
44. カージオイド $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ の長さ．（a は正の定数）
45. 曲線 $r = \sin\theta + \cos\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3}{4}\pi\right)$ の長さ．

46. 曲線 $r = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi)$ の長さ.

47. 曲線 $x = \cos t$, $y = \sin 2t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ で囲まれた図形の面積.

48. 曲線 $r = \cos^2 3\theta$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ で囲まれた図形の面積.

49. 曲線 $x = \dfrac{t^2}{2}$, $y = \dfrac{t^3}{3}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ の長さ.

50. 曲線 $r = \theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ の長さ.

51. 曲線 $x = t^3$, $y = t^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ と 2 直線 $x = 1$, $y = 0$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積.

52. 曲線 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ で囲まれた図形の面積.

53. 曲線 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ の長さ.

54. 曲線 $r = \dfrac{1}{\theta}$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 4\pi\right)$ の長さ.

➾注　(11,) 12, 14, 17, 25 (, 45) は，わざわざ積分しなくても，値が求まりますね.

もちろん積分すればいい訳ですが,「何が何でも積分で」という凝り固まった態度だけではなく，その都度 最も楽な方法を選ぶという柔軟さも（積分に慣れてきたら）身に付けてほしいなぁと思います.

➾注　例えば「半径 a の円の面積 S を積分で求めよ」という問題の場合，　*cf.*　11, 14, 32, 33, 45
立式の仕方は 1 通りではない：

$$\begin{aligned} S = \pi a^2 &= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx && (y = \sqrt{a^2 - x^2}) \\ &= 2\int_0^{\pi} |(a\sin t)(-a\sin t)|\, dt && (\text{媒介変数表示}) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\, d\theta && (\text{極座標表示}) \\ &= \cdots . \end{aligned}$$

問　a, b を正の定数とする．楕円：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{or} \qquad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\,,$$

の（周の）長さを求める式を立てよ.

➾注　この積分は,（初等関数の範囲では）計算できません.

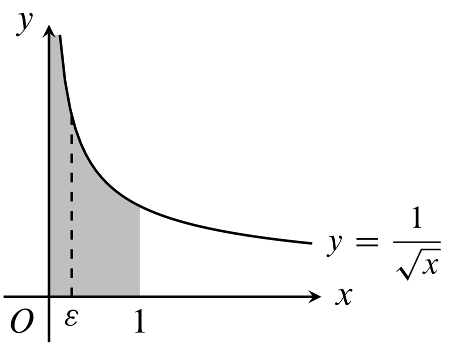
ただ（この例に限らず），計算できなくても立式はできる，ということは重要です.

2.8　広義積分　　—“定積分の定義の拡張”

◪　区間 $[a,b]$ で必ずしも連続でない関数の“定積分”

まず，関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の 0 から 1 までの“定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$”を考えよう．

関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は，$x = 0$ では定義されていないので，区間 $(0,1]$ では連続だが区間 $[0,1]$ では必ずしも連続ではない（ので，厳密には上の定積分は定義されない）．しかし，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ が表す（筈の）面積は，左下図の影をつけた部分の面積であると考えられる．



ε	$S(\varepsilon)$
10^{-1}	1.3675445
10^{-2}	1.8000000
10^{-3}	1.9367544
10^{-4}	1.9800000
10^{-5}	1.9936754
10^{-6}	1.9980000

そこで，$0 < \varepsilon < 1$ を満たす ε（イプシロン）をとって，（定積分が定義できる）$S(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ の値を求めてみると

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となり，ε を 0 に限りなく近づけていくと $(\varepsilon \to +0)$，$S(\varepsilon)$ の値は一定の値 2 に限りなく近づいていくことが分かる（右上表も参照）．すなわち，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\,.$$

これによって，定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ を定義する：

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$$

一般に，区間 $(a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ が存在するとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,,$$

区間 $[a, b)$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ が存在するとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,,$$

区間 (a, b) で連続な関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$ が存在するとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx\,,$$

によって，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を定義する．このように定義された積分は，広義積分 (improper integral) と呼ばれる．

※　右辺の極限は必ずしも収束するわけではなく，その場合，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は 存在しない．

例． $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty \qquad \therefore\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ は存在しない．

【例題 2.15】

広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を求めよ．

✍

問題 2.22　次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$　(3) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

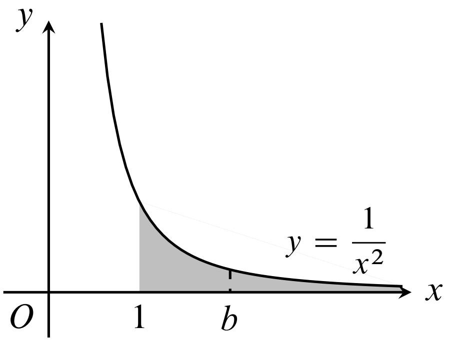
◪ **積分区間が無限区間である“定積分”** ... はまた来週．

◪ 区間 $[a, b]$ で必ずしも連続でない関数の“定積分” ... は前回の内容．

◪ 積分区間が無限区間である“定積分”

関数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ の 1 から ∞ までの“定積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$” を考えよう．

∞ は数ではないので，厳密には上の定積分は定義されていない．しかし，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ が表す（筈の）面積は，左下図の影をつけた部分の面積であると考えられる．



b	$S(b)$
10^1	0.9
10^2	0.99
10^3	0.999
10^4	0.9999
10^5	0.99999
10^6	0.999999

そこで，$b > 1$ を満たす b をとって，（定積分が定義できる）$S(b) = \displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ の値を求めてみると

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

となり，b の値が限りなく大きくなっていくと $(b \to \infty)$，$S(b)$ の値は一定の値 1 に限りなく近づいていくことが分かる（右上表も参照）．すなわち，

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1 .$$

これによって，定積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ を定義する：

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} .$$

一般に，区間 $[a, \infty)$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ が存在するとき，

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx ,$$

区間 $(-\infty, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ が存在するとき，

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\ ,$$

区間 $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ が存在するとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx\ ,$$

によって，各左辺の定積分を定義する．このように定義された積分もまた，**広義積分** (improper integral) と呼ばれる．

※　右辺の極限は必ずしも収束するわけではなく，その場合，広義積分は 存在しない．

【例題 2.16】

広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ．

✍

問題 2.23　次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{9+x^2}$

◪ 広義積分の性質

広義積分についても，これまでに学んだ定積分の性質：

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \left[k f(x) + \ell g(x)\right] dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \ell\int_a^b g(x)\,dx$ （k, ℓ は定数）
- 区間 (a, b) で $f(x) \geqslant g(x)$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

などが成立する．

残っている話題　**1．物理への応用：位置・速度・加速度**

2．微分方程式（変数分離形）

3．数値積分 …… 昔の高専の教科書には載っていたのですがねぇ．（懐古主義？）

キーワード： 台形公式（*cf.* 問題集），Simpson（シンプソン）の公式 *etc.*

2.9　変化率と積分

◪　位置・速度・加速度

位置：　原点からの変位．　── 以下では，簡単のために 1 次元の運動に限る．

時刻 t での物体の位置 x を

$$x = x(t)$$

［厳密には $x = f(t)$ などと書くべきだが，物理では，左のように略記してしまうことが多い．］

と書く（x は t の関数である，ということ）．これを求めることが，力学の目標である．

速度：　位置の（瞬間瞬間での）時間変化率．

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \textit{i.e.} \qquad dx = v\,dt \qquad\qquad \textit{cf.}\ \overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

（v も t の関数だが，微小な時間では一定とみなせる，ということ．）

加速度：　速度の（瞬間瞬間での）時間変化率．

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \textit{i.e.} \qquad dv = a\,dt \qquad\qquad \textit{cf.}\ \overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

（a も t の関数だが，微小な時間では一定とみなせる，ということ．）

※　$\dfrac{d}{dt}$ は，数学的には「t で微分」，物理的には「時間変化率」という意味．

例．　$x = x_0 = [一定]$ のとき，$v = 0$，$a = 0$．

$x = At + B$（A, B は定数）のとき，$v = A$，$a = 0$．

$x = At^2 + Bt + C$（A, B, C は定数）のとき，$v = 2At + B$，$a = 2A$．

※　dv と dx の関係は？

$dt = \dfrac{dx}{v}$ より，$dv = a\,dt = a\,\dfrac{dx}{v}$．　　$\therefore\quad v\,dv = a\,dx$．

ここで $v\,dv = d\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$ なので，$d\left(\dfrac{1}{2}v^2\right) = a\,dx$．　　*cf.* 運動エネルギーと仕事の関係．

速度から位置，加速度から速度を求めるには？

速度から位置を求める．　数学的には，$dx = v\,dt$ の両辺を $t = t_0$ から $t = t$ まで積分して，

$$\int_{t=t_0}^{t=t} dx = \int_{t=t_0}^{t=t} v\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$\therefore \quad \boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v\,dt}$$

この計算の物理的な意味は，以下の通り．微小時間 t から $t + \varDelta t$ までの間で，速度は $v = v(t)$ で一定とみなし，位置の変化は，

$$x(t + \varDelta t) - x(t) \fallingdotseq v(t)\varDelta t \qquad (*)$$

である．有限時間 $t = t_0$ から $t = t$ までの間の位置の変化を求めるために，$t = t_0$ から $t = t$ までの間を n 等分し，$\varDelta\tau = (t_1 - t_0)/n$ とおいて $\tau_k = k\varDelta\tau$ とする．このとき，$\tau_0 = t_0$，$\tau_n = t$，$\tau_{n+1} = \tau_n + \varDelta\tau$ である．ここで，式 $(*)$ で $t = \tau_k$ として，

$$\begin{aligned} x(\tau_{k+1}) - x(\tau_k) = x(\tau_k + \varDelta\tau) - x(\tau_k) &\fallingdotseq v(\tau_k)\varDelta\tau \\ &= [\text{左下図の黒い短冊の面積}] \end{aligned}$$

である．これを $k = 0$ から $k = n - 1$ まで足すと，

$$\begin{array}{lll} & k = 0: & x(\tau_1) - x(\tau_0) \fallingdotseq v(\tau_0)\varDelta\tau \\ & k = 1: & x(\tau_2) - x(\tau_1) \fallingdotseq v(\tau_1)\varDelta\tau \\ & & \vdots \\ +) & k = n-1: & x(\tau_n) - x(\tau_{n-1}) \fallingdotseq v(\tau_{n-1})\varDelta\tau \\ \hline & & x(\tau_n) - x(\tau_0) \fallingdotseq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)\varDelta\tau \end{array}$$

ここで，t_0, t は固定されているとして $n \to \infty$, $\varDelta\tau = \dfrac{t - t_0}{n} \to 0$ とすると，

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) = \lim_{\varDelta\tau \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)\varDelta\tau &= \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \\ &= [\text{右下図の影の部分の面積}] \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

が得られる．

この結果の意味は，以下の通り：

$$\underbrace{x(t_0)}_{\uparrow\ \text{初めの位置}} \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v\,dt \ .$$

※　速度を定積分して求まるのは，位置そのものではなく位置の変化量．

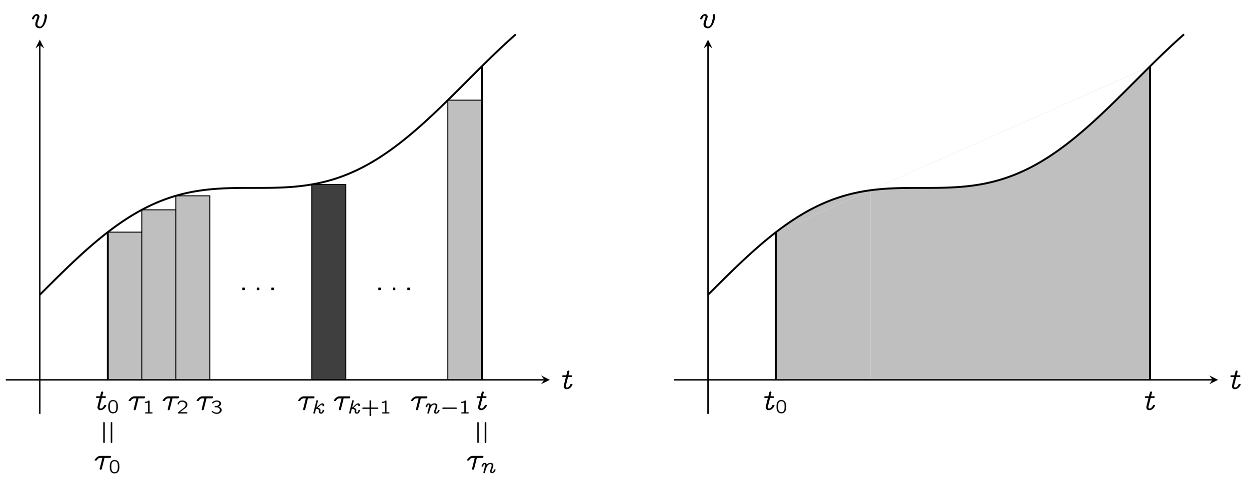


図 1: v-t グラフ

加速度から速度を求める. 同様に,

$$\int_{t=t_0}^{t=t} dv = \int_{t=t_0}^{t=t} a\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a\,dt}\ .$$

例. 等速直線運動 $a = 0$ のとき,

$$v(t) = \underbrace{v(t_0)}_{v_0} + \int_{t_0}^{t} 0\,dt = v(t_0) = v_0 \qquad (\text{速度一定}),$$

$$x(t) = \underbrace{x(t_0)}_{x_0} + \int_{t_0}^{t} v_0\,dt = x_0 + v_0(t - t_0)\ .$$

等加速度直線運動 $a = \alpha = [一定]$ のとき,

$$v(t) = \underbrace{v(t_0)}_{v_0} + \int_{t_0}^{t} \alpha\,dt = v_0 + \alpha(t - t_0)\ ,$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{x(t_0)}_{x_0} + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} \{v_0 + \alpha(t - t_0)\}\,dt \\ &= x_0 + \left[v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2\ . \end{aligned}$$

◪ **微分方程式（変数分離形）**

未知関数 y の導関数 $y', y'', \ldots$ を含んだ等式を**微分方程式** (differential equation) という. また, この等式を成り立たせる未知関数を微分方程式の**解** (solution) , 解を求めることを微分方程式を**解く** (solve) という.

例題 2.17

時間とともに増殖する細菌がある．この細菌の時刻 t における個数を $N(t)$ とすると，細菌の増加率はそのときの個数に比例するという．比例定数を λ とし，$t = 0$ における個数を N_0 とおくとき，$N(t)$ を表す式を求めよ．ただし，$\lambda > 0$ とする．

〈解答〉

問題 2.24

時刻 t におけるある放射性物質の中の原子の個数を $N(t)$ とすると，$-\dfrac{d}{dt}N(t) = -\dot{N}(t)$ は単位時間内の原子の崩壊個数を表し，これは現在の原子の個数に比例することが知られている．次の問いに答えよ．

(1) 比例定数を λ とし，$t = 0$ における個数を N_0 とおくとき，$N(t)$ を表す式を求めよ．ただし，$\lambda > 0$ とする．

(2) 原子の個数が最初の半分になる時刻（**半減期**という）を λ で表せ．

１年間ありがとうございました m(_ _)m