2024年度　数学AII　定期試験

（実施日：2025年2月6日）

得点	

2年＿＿組　整理番号：＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意： 試験時間は **100分** です．問題用紙は **2枚** あります．両方ともに記名してください．
解答欄があるものは，欄内に最終的な答えを書いてください．また，**問5** 以降は，特に断りがない限り，最終的な答えに至る過程も採点対象です．与えられた余白に，計算式や考え方などを，採点者に伝わるように書いてください．

問1． 次の不定積分を求めよ．ただし，**積分定数 C は省略せずに書くこと**．　[3点 × 6]

(1) $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int e^{2x+3}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \left(x^3+3x^2+3x+1\right)\,dx$

(6) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

問 2. 次の定積分の値を求めよ. [3 点 × 5]

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(2x^5 + 3x^3 + 4x\right) \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 4x \cos 3x \, dx$

問 3. 次の広義積分を求めよ. [4 点 × 2]

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx$

問題は裏面にもあります.

問 4. 次の (a)–(c) のうち，広義積分が存在するものを選び，記号で答えよ． [5 点]

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

問 5. 次の図形の面積を求めよ． [5 点 × 2]

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と 2 直線 $y = x$, $y = 4x$ で囲まれた図形

(2) $x = t^2$, $y = 1 - t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で表される曲線と x 軸および y 軸で囲まれた図形

問 6. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．ただし，求める長さは $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の 4 倍であることを用いてよい． [5 点]

問題は 2 枚目にもあります．

（ 計 算 用 ）

※ 計算用のページは，**採点対象外**です．

2 年＿＿組　整理番号：＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

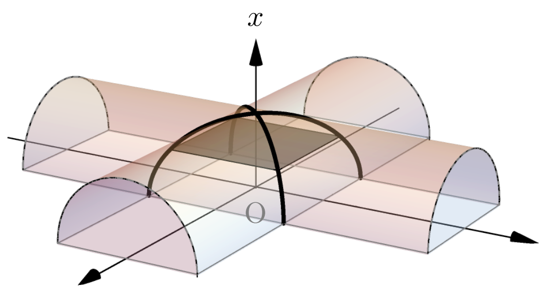
問 7. 半径 r の球の体積 V について，次の問いに答えよ．　[(1) 5 点，(2) 3 点]

(1) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを証明せよ．

(2) $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ は，図形的には何を表しているか．（答えのみでよい．）

問 8. 半径 1 の円柱どうしが原点を中心に直角に交わるとき，共通部分の体積を求めよ．　[5 点]

（ヒント：右下図参照．$x > 0$ のみ描画．この立体の高さ x での断面積は，$4(1 - x^2)$ である．）



問 9. $I(m, n) = \displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^m (\beta - x)^n \, dx$（$\alpha < \beta$，$m, n$ は 0 以上の整数）とする．$n \geqq 1$ のとき，

$$I(m, n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

であることを示せ．　[5 点]

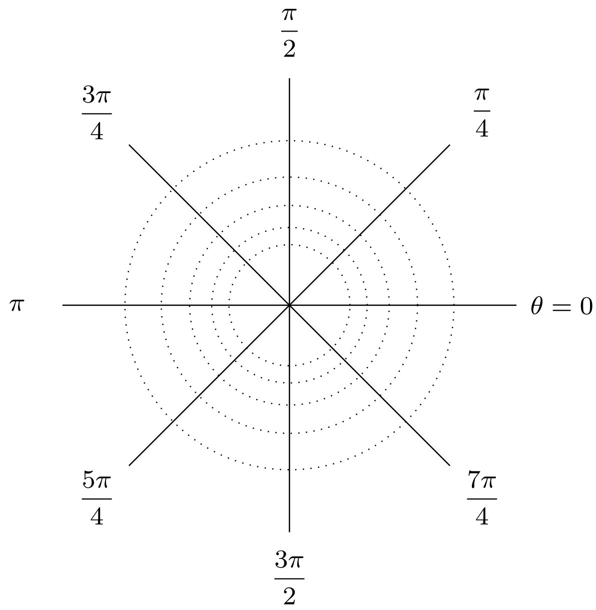
問 10. 極座標表示された関数 $r = e^{\frac{\theta}{\pi}}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ． [5 点 × 3]

(1) この関数のグラフを，右下図中にかけ．

（ただし，図中の円は，半径が小さい順に，

$$r = 1\,,\ r = e^{\frac{1}{4}}\,,\ r = e^{\frac{1}{2}},\ r = e^{\frac{3}{4}}\,,\ r = e\,,$$

である．必要であれば，これらを利用すること.）



(2) この曲線の長さを求めよ．

(3) この曲線と 2 つの半直線 $\theta = 0$, $\theta = \pi$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

問題は以上です．

（ 計　算　用 ）　　※　計算用のページは，**採点対象外**です．

（ 計　算　用 ）　　※　計算用のページは，**<u>採点対象外</u>**です．