2024年度　数学AII　定期試験

（実施日：2025年2月6日）

得点	100

2年＿＿組　整理番号：＿＿＿　氏名：＿＿**解答例**＿＿

注意： 試験時間は **100分** です．問題用紙は **2枚** あります．両方ともに記名してください．

解答欄があるものは，欄内に最終的な答えを書いてください．また，**問5** 以降は，特に断りがない限り，最終的な答えに至る過程も採点対象です．与えられた余白に，計算式や考え方などを，採点者に伝わるように書いてください．

問1. 次の不定積分を求めよ．ただし，**積分定数 C は省略せずに書くこと**．　[3点 × 6]

(1) $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$　$\boxed{3x^{\frac{1}{3}}+C}$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$　$\boxed{-\log|\cos x|+C}$

(3) $\displaystyle\int \log x\,dx$　$\boxed{x\log x - x + C}$

(4) $\displaystyle\int e^{2x+3}\,dx$　$\boxed{\frac{1}{2}e^{2x+3}+C}$

(5) $\displaystyle\int \left(x^3+3x^2+3x+1\right)\,dx$　$\boxed{\frac{1}{4}(x+1)^4+C}$

(6) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　$\boxed{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C}$

問2. 次の定積分の値を求めよ．　[3点 × 5]

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$　$\boxed{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(2x^5+3x^3+4x\right)\,dx$　$\boxed{0}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$　$\boxed{\pi}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$　$\boxed{\frac{2}{3}}$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 4x\cos 3x\,dx$　$\boxed{0}$

問3. 次の広義積分を求めよ．　[4点 × 2]

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　$\boxed{\frac{\pi}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$　$\boxed{1}$

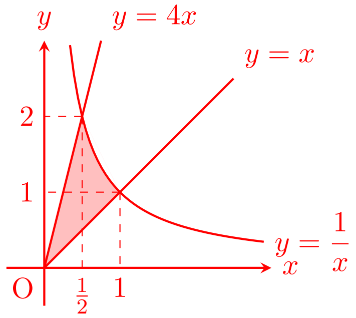
問 4. 次の (a)–(c) のうち，広義積分が存在するものを選び，記号で答えよ． [5 点]

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(c)

問 5. 次の図形の面積を求めよ． [5 点 × 2]

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と 2 直線 $y = x$, $y = 4x$ で囲まれた図形



左図より，求める面積は，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (4x - x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx$$

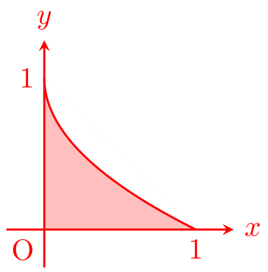
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 3x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\log x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} - 0 + \log 1 - \frac{1}{2} - \log\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$= -\log\frac{1}{2} = \log 2\ .$$

$\log 2$

(2) $x = t^2$, $y = 1 - t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で表される曲線と x 軸および y 軸で囲まれた図形



$0 \leqq t \leqq 1$ で $\dfrac{dx}{dt} = 2t \geqq 0$, $y = 1 - t \geqq 0$ だから，求める面積は，

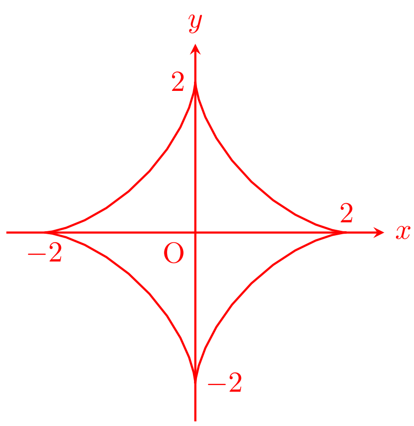
$$\int_0^1 (1 - t)\cdot 2t\,dt = 2\int_0^1 \left(t - t^2\right)\,dt$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\ .$$

$\dfrac{1}{3}$

問 6. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．ただし，求める長さは $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の 4 倍であることを用いてよい． [5 点]



$$\frac{dx}{dt} = -6\cos^2 t\sin t\ ,\quad \frac{dy}{dt} = 6\sin^2 t\cos t\ .$$

求める長さは $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の 4 倍で

$$4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36\cos^4 t\sin^2 t + 36\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt$$

$$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t\cos t|\,dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt \qquad (\because\ \sin 2t \geqq 0)$$

$$= 12\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 12\ .$$

12

問 7. 半径 r の球の体積 V について，次の問いに答えよ． [(1) 5 点，(2) 3 点]

(1) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを証明せよ．

半径 r の球は，曲線 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体であるから，その体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2}\, dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \pi \left(\frac{2}{3}r^3 + \frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 . \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ は，図形的には何を表しているか．（答えのみでよい．）

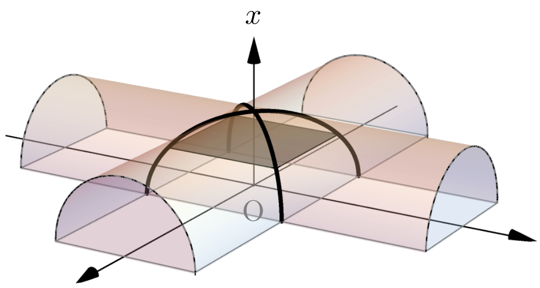
半径 r の球の表面積

問 8. 半径 1 の円柱どうしが原点を中心に直角に交わるとき，共通部分の体積を求めよ． [5 点]

（ヒント：右下図参照．$x > 0$ のみ描画．この立体の高さ x での断面積は，$4(1 - x^2)$ である．）

右図において，この立体の高さ x での断面積は $4(1 - x^2)$ であるから，これを $x = -1$ から $x = 1$ まで積分して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)\, dx &= 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} \\ &= 4\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} . \end{aligned}$$



$\dfrac{16}{3}$

問 9. $I(m, n) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n\, dx$（$\alpha < \beta$，$m$, n は 0 以上の整数）とする．$n \geqq 1$ のとき，

$$I(m, n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

であることを示せ． [5 点]

部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n\, dx \\ &= \left[\frac{1}{m+1}(x - \alpha)^{m+1}(\beta - x)^n\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{m+1}(x - \alpha)^{m+1}\left\{-n(\beta - x)^{n-1}\right\} dx \\ &= 0 + \frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{m+1}(\beta - x)^{n-1}\, dx \\ &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \end{aligned}$$

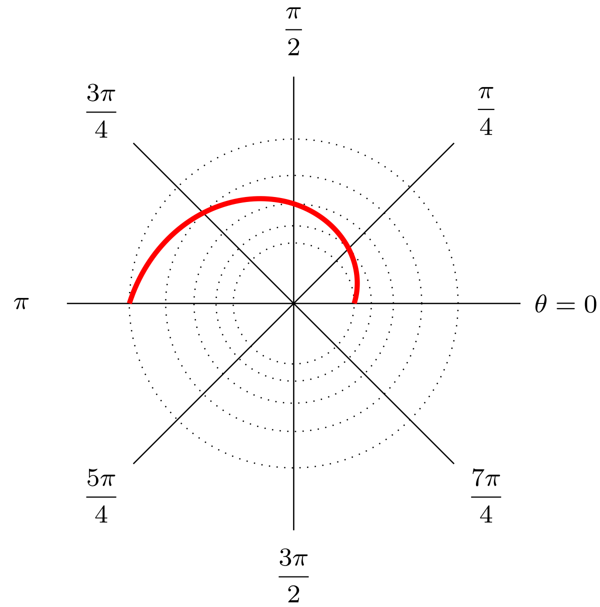
問 10. 極座標表示された関数 $r = e^{\frac{\theta}{\pi}}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ． [5 点 × 3]

(1) この関数のグラフを，右下図中にかけ．

(ただし，図中の円は，半径が小さい順に，

$$r = 1,\ r = e^{\frac{1}{4}},\ r = e^{\frac{1}{2}},\ r = e^{\frac{3}{4}},\ r = e,$$

である．必要であれば，これらを利用すること．)



(2) この曲線の長さを求めよ．

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{\pi}e^{\frac{\theta}{\pi}} \qquad \therefore \int_0^{\pi} \sqrt{\left(e^{\frac{\theta}{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}e^{\frac{\theta}{\pi}}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{e^{\frac{2\theta}{\pi}} + \frac{1}{\pi^2}e^{\frac{2\theta}{\pi}}}\, d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \int_0^{\pi} e^{\frac{\theta}{\pi}}\, d\theta$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \cdot \pi \cdot \left[e^{\frac{\theta}{\pi}}\right]_0^{\pi} = \sqrt{\pi^2 + 1}(e - 1)$$

$$\boxed{\sqrt{\pi^2 + 1}(e - 1)}$$

(3) この曲線と 2 つの半直線 $\theta = 0,\ \theta = \pi$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(e^{\frac{\theta}{\pi}}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{\frac{2\theta}{\pi}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[e^{\frac{2\theta}{\pi}}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)}$$