0　オリエンテーション

みなさん，こんにちは．今年度，「数学 B」の講義を担当する奈須田です．

居室：管理棟・一般教科棟 3 階 305 号室（奈須田教員室）　メール：y.nasuda@gunma-ct.ac.jp
個人 Web サイト：https://yuta-nasuda.github.io ☞

0.1　この授業について（※シラバスを参照）

概要　この授業では，数学の主要な分野の一つである代数学のうち，線型代数学 (linear algebra) の入門的な内容を講義する．前期には行列式を，後期には線型変換と固有値・固有ベクトルを扱う．線型代数学は，微分積分学とともに，自然科学・工学の専門的な内容を学ぶための基礎となる数学である．

教科書・参考書

[1] 高遠節夫ら，新線形代数 改訂版，大日本図書 (2021).

[2] 高遠節夫ら，新線形代数問題集 改訂版，大日本図書 (2021).

【大学生向け】

[3] 佐武一郎，数学選書 1　線型代数学（新装版），裳華房 (2015).

[4] 齋藤正彦，基礎数学 1　線型代数入門，東京大学出版会 (1966).

[5] 村上正康ら，教養の線形代数 五訂版，培風館 (2008).

[6] 長谷川浩司，線型代数—Linear Algebra［改訂版］，日本評論社 (2015).

[7] Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 5th Edition, Wellesley - Cambridge Press (2016).

[8] 瀬山士郎，「正比例」の数学—線形代数学の基礎理論案内，東京図書 (2014).

【高校生向け】

[9] 清史弘，分野別 受験数学の理論　9. 行列，駿台文庫 (2004).

[10] 宮腰忠，高校数学＋α：基礎と論理の物語／なっとくの線形代数，共立出版 (2004, 2007).

授業の進め方　授業は，板書を中心とした講義形式で行う．ノートをとって復習できるようにしておくこと（配布するプリントは，あくまで授業の補足のためである）．授業内で，適宜，演習の時間も設ける．

予習・復習　予習の必要はない（教科書を読んでおくと授業の理解度が上がるかもしれない）．また復習に関しては，課題や問題集を解くなど演習を積んで講義内容の理解を深めること．何も見ずに教科書や授業の流れを再現する，というのも良い復習の方法である．

課題の提出：　授業後から次の授業前日の 23:59 までに，Teams のクラス内へ．

質問　質問は，随時受け付けています．直接居室に来るか，MS Teams のチャット機能を使う（返信の目安：遅くとも 24 時間以内）など，各自の状況・都合に合わせた方法を選んでください．

0.2　行列の復習

◪　行列とは

いくつかの数を縦横に並べた数の表のことを行列という．

$$
\begin{array}{cl}
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\
\uparrow \text{第 } j \text{ 列} &
\end{array}
$$

：m 行 n 列の行列，$m \times n$ 行列．

a_{ij}　：(i, j) 成分．

なお，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ とも書かれる．$m = n$ の場合，A は n 次の正方行列と呼ばれ，特に，

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を単位行列といい，I_n などと表す（δ_{ij} は，Kronecker（クロネッカー）のデルタ）．

◪　連立 1 次方程式と行列

行列を考える一つの動機は，連立 1 次方程式を“ラクに”解くことであった．

【例題 0.1】

次の連立 2 元 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

※ $\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$

✍

結局，$A\vec{x} = \vec{b}$ で表される連立 1 次方程式を解くには，A が正則であれば，両辺に左から A^{-1} を掛けて，$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ を計算すればよい．

✍

問題0.1　次の連立 1 次方程式を，行列を用いて解け．

(1) $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 3x-2y=-12 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y=-5 \\ -6x+3y=15 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} -x-2y+3z=4 \\ 3x+6y-5z=0 \\ 2x-y+4z=12 \end{cases}$

以降この授業では，特に断らない限り，行列は正方行列のみを考える．

0.3　概観（前期分）

✍

問題0.2　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$

前期の授業では，行列式そのものについて，詳しく学んでいく：

- 行列式の定義
- 行列式の性質
- 行列式の計算方法
- 行列式を用いた連立 1 次方程式の解法
- 行列式の図形的意味

行列式は，逆行列の存在や連立 1 次方程式の解法以外にも，行列の固有値を求める際にも重要な役割を果たす．これが，後期の主題の一つである．

問　$a \neq 0, ad-bc \neq 0$ のとき，連立 1 次方程式：

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

を授業で示した 3 通りの方法で解いてみよ．

1　行列式の定義と性質

1.1　2 次の場合：導入

◪　定義

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は，$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である．

◪　性質

行列式 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ のもつ性質を具体的に示してゆく．なお，以下の性質は，一般に n 次正方行列の行列式に対しても同様に成り立つ（成り立つように定義を拡張する）．

(i) 単位行列の行列式の値は 1 である．

(ii) 2 つの行を交換すると行列式の符号が変わる．

(iii) 行列式は，各行について線型性をもつ．

- (a) 1 つの行の各成分が 2 数の和として表されているとき，この行列式は 2 つの行列式の和として表すことができる．
- (b) 1 つの行のすべてに共通な因数は，行列式の因数としてくくり出すことができる．

※ 以上の 3 つが特に重要な性質である．以下の 7 つの性質は，これら 3 つを用いて示すことができる．

(iv) 2 つの行が等しい行列式の値は 0 である．

(v) 1 つの行の各成分に同一の数を掛けて他の行に加えても，行列式の値は変わらない．

(vi) 1 つの行のすべての成分が 0 のとき，行列式の値は 0 である．

(vii) 三角行列の行列式は，すべての対角成分の積である．

(viii) 正則でない行列の行列式の値は 0 であり，正則な行列の行列式の値は 0 でない．

(ix) 2 つの行列の積 AB の行列式は，2 つの行列式 $|A|, |B|$ の積である．

(x) A の転置行列 A^{T} の行列式は A の行列式に等しい．

※　(ii)–(vi) において，「行」を「列」に置き換えても成り立つ．

問　このことを確認せよ．

問　以上の性質 (i)–(x) から，逆に行列式の定義式 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を導け．

性質 (ix) の確認. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とする.

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{(iii-a)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{(iii-a)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{(iii-b)}}{=} a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{(iii-b)}}{=} a_{11}a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + a_{12}a_{22} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{(ii),(vi)}}{=} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A||B| \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

性質 (x) の確認. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $(a_{11} \neq 0)$ とすると,

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \qquad (= LU \text{ とおく})
$$

と分解できる. $A^\top = U^\top L^\top$ であり,

$$
|A^\top| = |U^\top L^\top| \overset{\text{(ix)}}{=} |U^\top||L^\top| \overset{\text{(vii)}}{=} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot 1 = |A| \qquad \blacksquare
$$

1.2 3 次の場合

3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は,

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

と定義される.

問　この定義が，(i)–(x) の性質を満たしていることを確認せよ．

問　性質 (i)–(x) から，逆に 3 次の場合の行列式の定義式を導け．

問題 1.1　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

1.3　一般（n 次）の場合

◪　性質

すでに述べたように，p. 4 で挙げた行列式の性質は，一般に n 次の正方行列の行列式に対しても成り立つ（そのように定義を拡張する）．

これらの性質を用いることで，（行列式の定義はまだ与えられていないが）一般に n 次の場合の行列式についても，その値を求めることができる．

【例題 1.1】

行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

✍

問題 1.2　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

※　次の関係式を覚えておくと便利である：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.3 一般（n 次）の場合（続き）

◪ 定義

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det A$ は,

$$\det A = \sum_{P} \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

と定義される．ここで,

$$\varepsilon_P = \begin{cases} +1 & (P \text{ が偶順列のとき}) \\ -1 & (P \text{ が奇順列のとき}) \end{cases}$$

である．

問 $n \geqslant 4$ の場合には，Sarrus の方法は使えない．このことを，$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ を例に確かめよ．

◪ 順列

$n = 3$ の場合の行列式の定義を見ると,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\ , \end{aligned}$$

次のことに気が付く：

- 各項を見ると，各行から 1 つずつ数を選びそれらを掛けたものになっている．
- 行の添字を $(1, 2, 3)$ の順に固定したとき，列の添字は

  $$(1, 2, 3)\ ,\ \ (2, 3, 1)\ ,\ \ (3, 1, 2)\ ,\ \ (1, 3, 2)\ ,\ \ (2, 1, 3)\ ,\ \ (3, 2, 1)$$

  となっており，これらは 3 数 $1, 2, 3$ 全部を 1 列に並べたもの＝順列 (permutation) で，その総数は $3! = 6$ 通りである．
- さらに,

  $$\begin{array}{ll} (1, 2, 3)\ ,\ \ (2, 3, 1)\ ,\ \ (3, 1, 2) & \text{のとき符号は } +, \\ (1, 3, 2)\ ,\ \ (2, 1, 3)\ ,\ \ (3, 2, 1) & \text{のとき符号は } - \end{array}$$

  となっている．

1 から n までの n 個の異なる自然数があるとき，これら全部を並べてできる順列を

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

と表す．このような順列は, 全部で $n!$ 通りある．そのうち小さい方から順に並んでいる順列 $(1, 2, \ldots, n)$ を基本順列と呼ぶことがある．

ある順列 $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ に,

$$\text{その順列の中の 2 数を交換する} \tag{$*$}$$

という操作を何回か施して，基本順列に変形するとき，操作 $(*)$ の回数の偶奇は，変形の仕方によらず一定となる．操作 $(*)$ の回数が偶数の場合に P を偶順列，奇数の場合に P を奇順列という．

【例題 1.2】

3 数 $1, 2, 3$ 全部を並べてできるすべての順列について，偶順列か奇順列かを調べよ．

✍

問題 1.3　次の順列について，偶順列か奇順列かを調べよ．

(1)　$(3, 1, 4, 2)$　　(2)　$(5, 3, 4, 1, 2)$

【例題 1.3】

次の行列式の値を定義に従って求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

✍

問題 1.4　次の行列式の値を定義に従って求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

【例題 1.4】

次の等式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

✍

問題 1.5　次の行列式の値を求めよ.　※ それぞれ，**問題 1.1** (3)，**問題 1.2** (1) と同じ問題.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

問題 1.6　一般の n 次の場合について，性質 (i)–(x) を証明せよ.

《前期中間試験の範囲，終了......？？》

1.4　いろいろな行列式

【例題 1.5】

次の行列式を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

✍

問題 1.7　次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & a \\ x & y & b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

◪ Vandermonde（ヴァンデルモンド）行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_i - x_j) .$$

ここで，$\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i - x_j)$ は，m 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ の多項式で，全ての 2 変数の組の差の積：

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_m) \\ \times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_m) \\ \ddots \\ \times (x_{m-1} - x_m) , \end{aligned}$$

であり，差積と呼ばれ，$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ などと表される．

問　Vandermonde 行列式を導け．

問　差積 $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ が交代式であることを示せ．

ここで，交代式とは，m 変数の多項式 $f(x_1, \ldots, x_m)$ で，その中の任意の 2 変数を入れ替えて符号が変化する，つまり $-f(x_1, \ldots, x_m)$ となる式のことである．

◪ ヤコビアン（Jacobi 行列式）

$(x, y) \to (u, v)$ なる座標変換を考える．$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$ のとき，偏導関数の行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を x, y の u, v に関するヤコビアン（Jacobi 行列式）という．

問 次の行列式を計算せよ．

(1) $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ （座標変換 $(x, y) \to (r, \theta)$；$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき）

(2) $J = \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}$ （座標変換 $(x, y) \to (u, v)$；$x = Au + Bv + C, y = Du + Ev + F$ のとき）

◪ 1 次の行列式

$A = (a_{11})$ とする．

$$\det A = |a_{11}| = a_{11} \ .$$

◪ 巡回行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} (a_1 + a_2\omega_k + a_3{\omega_k}^2 \cdots a_n{\omega_k}^{n-1}) \ , \quad \omega_k \equiv e^{2\pi i \frac{k}{n}} \ .$$

問 これを示せ．

◪ 縁付け行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - x^{\top} A y \ , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \ , \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ .$$

問 これを示せ．

◪ 多項式の行列式表示

1 変数の n 次多項式

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

は，行列式を用いて以下のように表すこともできる：

$$p_n(x) = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & \vdots & \ddots & \ddots & x & -1 \\ a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

問　このことを示せ.

◪ ロンスキアン（Wroński《ロンスキー》行列式）

2 つの関数 $f(x), g(x)$ が 1 次独立（線型独立）であるとは，

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$$

を恒等的に満たす α, β が $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ 以外に存在しないことをいう．関数 $f(x), g(x)$（十分滑らかだとする）が 1 次独立であるための必要十分条件は，

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$$

であり，左辺の行列式はロンスキアン（Wroński《ロンスキー》行列式）と呼ばれる.

cf.　グラミアン（Gram《グラム》行列式），カゾラーティアン（Casorati《カゾラーティ》行列式）

問　n 個の関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ の場合はどうなるか？

◪ 交代行列の行列式

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ が $A^{\mathsf{T}} = -A$ であるとき，A を交代行列という．その行列式は，n が奇数なら 0，n が偶数なら a_{ij} のある多項式の平方になる：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} (\mathrm{Pf}\,A)^2 & (n \text{ は偶数}) \\ 0 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

なお，多項式 Pf A はパフィアン (Pfaffian) と呼ばれる.

問　Pf A は具体的にどのように書き表されるか？

1.5 行列式の計算（まとめ）

当面の目標は正しく行列式の計算ができることなので，ここで行列式計算の方針をまとめておく．

（ • 定義に従って計算する．）

- 2, 3 次なら，Sarrus の方法を用いる．
- 行（列）基本変形を施して，
  - 「次数を下げる公式」を用いて，2, 3 次の行列式に帰着させる（Sarrus の方法）．
  - 三角化 → 対角成分の積で計算する．
- 諸性質を使う．

※ あとは，これらを正しく実行できるように，たくさん練習を積んでください．すでに解いたことのある問題を別の方法で解き直してみたり，自分で適当に数字を並べて行列式を作り計算してみたり（この場合，友人らと答えを比べてみるのが良いでしょう）するのも，良い練習になると思います．

【例題 1.6】

次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 0 & 13 \end{vmatrix}$$

✍

※ 行列式の次数を下げる一般公式

$$\begin{vmatrix} & A & & 0 & & B & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ m_{i1} & \cdots & m_{i(j-1)} & m_{ij} & m_{i(j+1)} & \cdots & m_{in} \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & C & & 0 & & D & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} m_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} & A & & m_{1j} & & B & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & m_{(i-1)j} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & m_{(i+1)j} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & C & & m_{nj} & & D & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} m_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

A　トレース（跡；対角和）

この授業（前期分）のイントロダクションとして，次のような話をしました：

> 行列は，大雑把にいえば，縦横に数を並べた数の表です．ある正方行列が与えられたときに，それが n 次であれば，n^2 個の数が並んでいます．この行列を，たった 1 つの数で代表させたい．もちろん，この 1 つの数さえ知っていれば元の行列の全てが分かるということはないけれども，それでもその行列を特徴付けるような—magical な—数を考えることはできないだろうか？ そうして導入されたのが，行列式です．

当然，「行列式以外にも正方行列を特徴付けるような数はないのか？」という疑問をもつ人もいるでしょう．（いくつか）あります．— 今回は，正方行列を特徴付けるもう一つの数に関するお話です．

◪　定義

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ について，その対角成分の和：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} ,$$

のことをトレース (trace) または跡（せき），対角和，シュプール (Spur) といい，tr A などと表す．

例.　$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$,　$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15.$

問　次のトレースの値を求めよ.

(1)　$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　　(2)　$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$　　(3)　$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

◪　性質

A, B を n 次の正方行列，c を定数とする.

(i) 線型性.
  (a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
  (b) $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr} A$

(ii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

問　以上の性質を示せ.

問　次のことを示せ．ただし，A, B, C は n 次の正方行列だとする.

(1)　$\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{tr} A$　　(2)　$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$

【前期中間試験の講評】

問 1. (a) の「線型性」は，2, 3 年生の数学 B で（おそらく）最も重要な概念です．

問 2. (2) は，オンデマンド授業で強調したつもりだったのですが⋯⋯

問 3. 行列式の計算の検算は，どうすればよいのでしょうか...？ 一つの方法は，別の計算法で同じ答えになることを確かめることでしょうか．よりよい方法を知っている方，ぜひ教えてください．

問 4. (1) $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ です（この指数計算は常識にしておいてください）．
(2) 山を張って，最終的な答えを暗記していた人もいたようです．運も実力のうち？

問 5. $x = 0, 1, 2, \ldots$ とシラミツブシに調べていくのも一考 (?)

問 6.「○○を示せ」という問題で，その○○を使って証明しようとしても，なんの意味もありません（所謂「進次郎構文」？）．いきなり「$|A||A^{-1}| = 1$ だから〜」と書くのも，ほぼ同罪．
また，行列 A に対して，$1/A$ は（通常）定義されません（逆行列 A^{-1} は別概念）．

問 7. (2) で $-(4x^2 - 1) = -4x^2 - 1$ とする計算ミスが多かったです．これに限らず，いろいろな計算ミスに気が付けるよう「$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$」を与えたつもりだったのですが⋯⋯

1.6 行列式の展開

行列 A（正方行列に限らない）から，p 個の行と p 個の列を取り出して作った p 次の正方行列を A の p 次小行列といい，その行列式を p 次の小行列式 (minor determinant) という．

ふたたび，行列 A を n 次の正方行列に限ろう．n 次の行列式 $|A|$ の第 i 行と第 j 列とを取り除いてできる $n-1$ 次の小行列式を (i, j) 成分の小行列式や第 (i, j) 小行列式といい，D_{ij} などと表す：

$$
D_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}.
$$

$$\uparrow$$
$$\text{第 } j \text{ 列}$$

(i, j) 成分の小行列式 D_{ij} に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを第 (i, j) 余因子 (cofactor) といい，$\tilde{a}_{ij}$ と表す．

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の第 $(2, 3)$ 余因子は，$\tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

問 上の A に対して，第 $(1, 2)$ 余因子，第 $(2, 2)$ 余因子，第 $(3, 3)$ 余因子を求めよ．

定理（余因子展開；Laplace expansion）． n 次の正方行列 A に対して，

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in} = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$$

（第 i 行に関する展開）

$$= (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj} = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$$

（第 j 列に関する展開）.

※　第 i 行［第 j 列］に関する線型性と「行列式の次数を下げる一般公式」とによって，証明される．

【例題 1.7】

次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

✍

問題 1.8　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

2　行列式の応用

2.1　行列式と逆行列

◪　余因子行列

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，第 (i, j) 小行列式を D_{ij} と書けば，

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

を第 (i, j) 余因子と呼ぶのであった．ここでは，これを成分にもつ行列 n 次の正方行列 $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ji})$（$\tilde{a}_{ji}$ を (i, j) 成分とする行列；添字の順序に注意）：

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

を考える．$\widetilde{A}$ は，A の余因子行列 (adjugate matrix) と呼ばれる．$(\tilde{a}_{ij}) = \widetilde{A}^{\mathsf{T}}$ のことを余因子行列 (cofactor matrix) と呼ぶ場合もあるので，注意が必要である．

ここで，

$$|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} \qquad \text{（第 } i \text{ 行に関する展開）}$$

と

$$a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{kn} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{ 第 } k \text{ 行}.$$
$$\overset{\text{(iv)}}{=} 0$$

であることとを用いると，

$$A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| I_n$$

が導かれる．また同様に，列に関する展開を考えることによって，$\widetilde{A}A = |A| I_n$ も成り立つことが分かる．

例.　$n = 2$ の場合.　✍
　　$n = 3$ の場合.　教科書 pp. 106–107 参照.

◪ 行列式を用いた逆行列の計算方法

性質 (viii) により，

$$A \text{ が正則である} \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

であり，このとき

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{$*$}$$

なる逆行列 A^{-1} がただ一つ存在する．

A が正則であるとき，余因子行列の満たす関係式 $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I$ において，各辺を $|A|$ $(\neq 0)$ で割ると，

$$A\left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right)A = I$$

を得る．$(*)$ と比較すると，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

であることが分かる．

これを用いて，以下の例題を解いてみよう：

【例題 2.1】

次の行列は正則であるかどうか調べよ．正則ならば，逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

✍

問題 2.1 次の行列は正則であるかどうか調べよ．正則ならば，その逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2.2 行列式と連立 1 次方程式（行列式を用いた連立 1 次方程式の解法）

$$A\vec{x} = \vec{b}\,, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

と表される連立 1 次方程式を考える．

例 1. $$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

例 2. $$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$|A| \neq 0$ のとき，$(*)$ の解は，形式的に

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{$**$}$$

と書かれる．以下，特に断らない限り，$|A| \neq 0$ とする．

◪ Cramer（クラメル）の公式

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ と計算されることを用いると，$(**)$ は

$$\begin{aligned} \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}\,\vec{b} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{n1}b_n \\ \tilde{a}_{12}b_1 + \tilde{a}_{22}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{n2}b_n \\ \vdots \\ \tilde{a}_{1n}b_1 + \tilde{a}_{2n}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nn}b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる（ただし，$\tilde{a}_{ij}$ は第 (i, j) 余因子を表す）．ここで，行列式 $|A|$ の第 j 列を $\vec{b}$ に置き換えた行列式を Δ_j として，第 j 列に関する余因子展開をすると，

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{1j}b_1 + \tilde{a}_{2j}b_2 + \cdots \tilde{a}_{nj}b_n$$

であるから，

$$\vec{x} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \qquad i.e. \quad x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

を得る．これを，Cramer の公式と呼ぶ．

例 1.　$ad - bc \neq 0$ のとき，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ の解は，$x = \dfrac{ds - bt}{ad - bc}$，$y = \dfrac{at - cs}{ad - bc}$．

例 2.　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ のとき，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の解は，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

【例題 2.2】

次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 3x + 4y - 2z = 19 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

✍

問題 2.2　次の連立 1 次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x - 5y - 5z = 0 \\ 2x - 7y - 5z = -1 \\ 5x + 6y - 2z = 3 \end{cases}$

◪ 特に $\vec{b}=\vec{0}$ の場合

ここで，$\vec{b}=\vec{0}$ の場合について考察しよう．

当然，$|A|\neq 0$ であれば，$A\vec{x}=\vec{0}$ の解は $\vec{x}=\vec{0}$ である．他方，$|A|=0$ のとき，$\vec{x}=\vec{0}$ は $A\vec{x}=\vec{0}$ の解であるが，これ以外にも解は存在する（これを非自明な (nontrivial) 解という）．

例. $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x-6y=0 \end{cases}$ の解は，t を任意の実数として，$\begin{cases} x=3t \\ y=t \end{cases}$ ．

次の定理が成立することが知られている：

定理（$A\vec{x}=\vec{0}$ が非自明な解をもつ条件）． 連立方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ が $\vec{x}=\vec{0}$ 以外の解をもつための必要十分条件は，

$$|A|=0 \qquad \textit{i.e.} \quad A \text{ が正則でない}$$

ことである．

【例題 2.3】

次の連立 1 次方程式が $x=y=z=0$ 以外の解をもつように定数 k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -2x+3y-z=0 \\ -x+ky+z=0 \end{cases}$$

✍

問題 2.3　次の連立 1 次方程式が非自明な解をもつように定数 k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 5x+ky=0 \\ -\dfrac{15}{2}x+6y=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x+4y-2z=0 \\ kx+7y-3z=0 \end{cases}$

復習：　2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ がいずれも零ベクトルでなく，平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ とは線型独立 (linearly independent) または 1 次独立であるという．$\vec{a}, \vec{b}$ が線型独立であるための必要十分条件は，

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \iff x = y = 0$$

が成り立つことである． （復習終わり）

$\vec{a}, \vec{b}$ を並べてできる行列 $(\vec{a}\ \ \vec{b})$ を A，また $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，これは，連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ が非自明な解をもたない（自明な (trivial) 解のみをもつ）ことと言い換えられる．すなわち，$\vec{a}, \vec{b}$ が線型独立であるための必要十分条件は，

$$\det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i.e. \quad A \text{ が正則である}$$

ことである．

同様に，n 個の n 次元ベクトル $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$，$\ldots \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ について，これらが線型独立であるとは，

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_1 + \cdots x_n\vec{a}_n = \vec{0} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

が成り立つことをいう．よって，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ を並べてできる行列 $(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n)$ を A，また $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすれば，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が線型独立であるための必要十分条件は，

$$\det\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i.e. \quad A \text{ が正則である}$$

ことである．

例．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線型独立である．

問題 2.4　次のベクトルの組は線型独立か線型従属かを調べよ．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

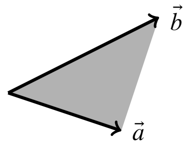
2.3 行列式の図形的意味

◪ 2 次の行列式の図形的意味

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ の図形的意味を考える．はじめに，次の例題を考えてみよう．

【例題 2.4】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の張る三角形の面積を求めよ．



復習： $\vec{a}, \vec{b}$ の張る三角形の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \qquad (\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \qquad (*) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

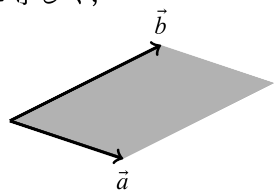
（復習終わり）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおいて，$(*)$ に代入すると，

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}\right| .$$

つまり，$\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$ は，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の張る三角形の面積の 2 倍に等しく，

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積



に等しいことがいえる．

問 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の符号は何を表しているか？

答． $\vec{a}$ に対して，$\vec{b}$ が左側のとき正．右側のとき負．

cf. $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とすると，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \vec{a}'\cdot\vec{b}$ である．

ここで，$\vec{a}' = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ は $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転したベクトルである．

<u>問題 2.5</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ．

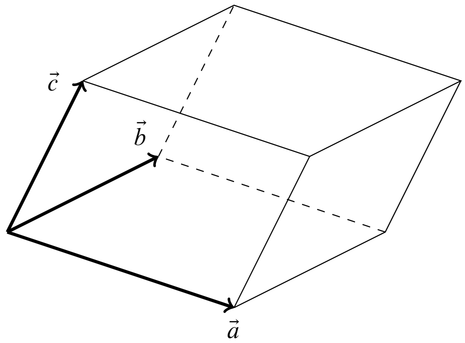
<u>問題 2.6</u> 平面上に 3 点 $A\ (4, -5)$, $B\ (1, -1)$, $C\ (2, 3)$ があるとき，$\triangle ABC$ の面積を求めよ．

◪ 3 次の正方行列の図形的意味

次に，$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の図形的意味を考える．$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおく．

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の張る平行六面体（parallelepiped；向かい合った 3 組の面がそれぞれ平行である六面体で，全ての面が平行四辺形である）を考えよう．

この体積 V は，次のようにして求められる：

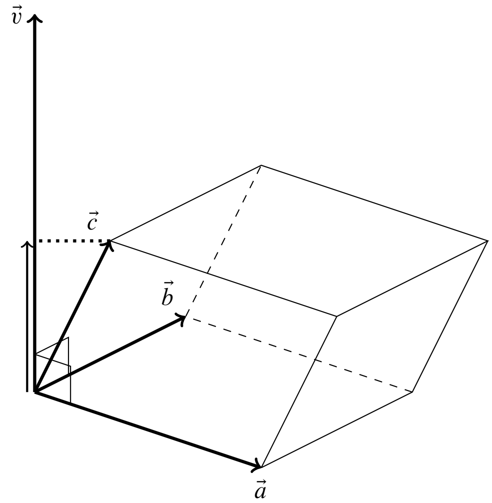


まず，$\vec{a},\vec{b}$ の張る平行四辺形（底面）の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \qquad (\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2} \end{aligned}$$

である．ここで，

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad (**)$$



とすると，$\vec{v}$ は $|\vec{v}|=S$ であり $\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直な ($\because\ \vec{a}\cdot\vec{v}=\vec{b}\cdot\vec{v}=0$) ベクトルである．この立体の高さは，$\vec{c}$ の $\vec{v}$ 上への正射影ベクトルの大きさに等しいから，

$$\begin{aligned} V &= S\cdot\frac{|\vec{v}\cdot\vec{c}|}{|\vec{v}|} = |\vec{v}\cdot\vec{c}| \\ &= |(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3| \\ &= |a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|. \end{aligned}$$

よって，

$\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|$ は，$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ の張る平行六面体の体積に等しい．

問 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の符号は何を表しているか？ *cf.* 右手系，左手系

問題 2.7 $\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の張る平行六面体の体積を求めよ．

◪ 外積（ベクトル積，クロス積）

$(**)$ のベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積，あるいはベクトル積 (vector product)，クロス積 (cross product) といい，$\vec{a}\times\vec{b}$ で表す：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\vec{e}_x+\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\vec{e}_y+\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\vec{e}_z\,.$$

ただし，$\vec{a},\vec{b}$ が線型従属の場合，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ とする．

この定義より，$\vec{a}\times\vec{b}$ は次の性質をもつことが判る：

- $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する；
- $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ はこの順に右手系をなす；
- $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは $\vec{a},\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

さらに，

- $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$;
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
- $k(\vec{a}\times\vec{b})=k\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times k\vec{b}$,

などの計算法則が成り立つ．

<u>問題 2.8</u>　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ とする．$\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ．

<u>スカラー三重積</u>　$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\det\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$

例．　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ とする．

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&-3&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=12\,.$$

みなさん，お久しぶりです．— 夏休みはどうでしたか？（私の感想は「短い！」です．）

数学の授業とは関係ないのですが，国際交流室員としての奈須田から，お願いがあります．

✎ 群馬高専では，今年度末の 3 月 16 日（日）〜3 月 23 日（日）にシドニーで短期海外語学研修を実施する予定です．つきましては，参加に関する希望調査を form で行うので，ご回答ください．

3　線型変換と表現行列

3.0　結局，行列は何を表しているのか？

◪　行列とは

行列とは，いくつかの数を縦横に並べた数の表のことをいう（*cf.* 第 1 週 §0.2）．

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow$
第 j 列

: m 行 n 列の行列，$m\times n$ 行列．

a_{ij} : (i,j) 成分．

では一体，この数が並んでいる表＝行列は，何を表しているのだろうか？

— 行列は「線型写像」と呼ばれる写像を表しており，その性質を調べることが線型代数学の重要な主題の一つである．（線型代数＝行列の計算，ジャナイヨ．）

線型写像は数学の他の分野でも現れ，広く数学を理解する上で欠かせないだけでなく，自然科学・工学の分野への応用の点からも重要である．後期の授業では，線型写像（特に線型変換）について扱う．

◪　行列の積と行列の型（復習）

$A=[a_{ij}]$ を $m\times n$ 行列，$B=[b_{ij}]$ を $n\times\ell$ 行列とすると，A と B の積 AB が定義され，これは $m\times\ell$ 行列となる．

$$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{B}_{n\times\ell}=\underbrace{C}_{m\times\ell}$$

例. $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times 2}=\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 18 & 31 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}}_{3\times 2}$$

特に $\ell = 1$（B が n 次の列ベクトル）のとき，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_{m\times 1}$$

となり，積 AB は ℓ 次の列ベクトルとなる．つまり，$m \times n$ 行列は，

これを“左から掛ける”ことで，n 次の列ベクトルを m 次の列ベクトルに写す

$$\overset{n\text{ 次の列ベクトル}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} \quad \xmapsto{A\vec{b}} \quad \overset{m\text{ 次の列ベクトル}}{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}$$

といえる．

例．$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ は，4 次の列ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 3 次の列ベクトル $\begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}$ に写す．

$$\because) \quad \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

※　1 つの行だけからなる $1 \times n$ 行列 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ のことを n 次の行ベクトル (row vector) という．

1 つの列だけからなる $m \times 1$ 行列 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ のことを m 次の列ベクトル (column vector) という．列ベクトルは，座標のように $(a_1, \ldots, a_m)$ と書かれることもある．また，列ベクトルは $\vec{a}$ や $\boldsymbol{a}$（手書きの場合は $\mathbb{a}$）と表す．

<u>問題 3.1</u>　次の行列の積について，その型を答えよ．（積を計算する必要はない．）

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

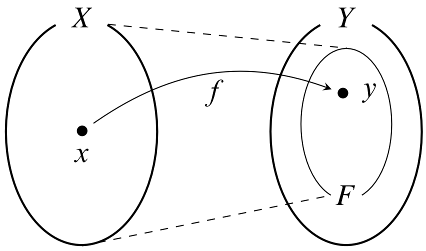
(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

◪ 行列と線型写像

定義（写像）．集合 X, Y があって，X の任意の要素 x に対して，Y の要素 y をただ 1 つ対応させる対応関係 f を, X から Y への写像 (map, mapping) と呼び,

$$f : X \to Y \qquad や \qquad f : x \mapsto y \qquad や \qquad y = f(x)$$

などと表す．またこのとき，X を定義域または始域 (domain)，Y を終域 (codomain)，$y = f(x)$ と書ける y の集合 F を値域 (range) と呼ぶ．



定義（線型写像，線型変換）．n 次の列ベクトル $\vec{x}$ を m 次の列ベクトルに写す操作 f が次の 2 条件：

(i) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

(ii) $f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$ 　　（k は定数）

を満たすとき，f を線型写像 (linear mapping) という．特に $n = m$ のとき，f を線型変換または 1 次変換 (linear transformation) と呼ぶ． ◇

※　(i), (ii) は，操作 f によってベクトルの演算（和，定数倍）が保たれることを意味している．

cf.　比例関数 $y = f(x) = ax$.

$\boxed{A \text{ を } m \times n \text{ 行列とするとき，} f(\vec{x}) = A\vec{x} \text{ が線型写像となっていることを確認しよう．}}$

行列の積についての演算法則（☞ 教科書 p. 59）から，

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \,,$$
$$f(k\vec{x}) = A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}) = kf(\vec{x}) \,,$$

となる．

逆に，任意の線型写像 f は，適当な行列を用いて表すことができる．このとき，この行列を（ある基底に関する）f の表現行列 (representation matrix) という．

以降この授業では，特に断らない限り，$n = m = 2$ の場合のみを考える．

すなわち，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の表す線型変換のみを考える．

3.1 線型変換

◪ $n = m = 2$ の場合の線型写像

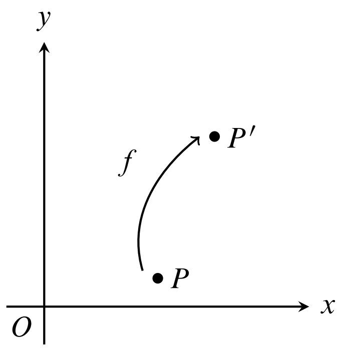
行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の表す線型変換 f によって，平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は平面ベクトル $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ へと写される：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \textit{i.e.} \quad f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

あるいは，平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は座標平面上の点 $P\,(x, y)$ と同一視できるので，f によって点 $P\,(x, y)$ が点 $P'\,(x', y')$ に移される：

$$f : (x, y) \mapsto (x', y') \quad \text{or} \quad P' = f(P)\,,$$

と見ることもできる（この方が直感的に理解しやすい？）.



注意. 線型変換で，原点は常に原点に移される（不変）. $\qquad \because)\quad A\vec{0} = \vec{0}\,.$

【例題 3.1】

行列 $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ の表す線型変換を f とするとき，点 $P\,(3, 1)$, $Q\,(-1, 2)$ が移る点 $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ の座標を求めよ.（点 P', Q' は，それぞれ点 P と Q の像と呼ばれる.）

✍

問題 3.2　次の行列が表す線型変換について，点 $(2, 3)$ の像の座標を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

【例題 3.2】

ベクトル $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 A を求めよ．

✍

※　行列のベクトルへの分割

2 次正方行列 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ について，$\vec{a} = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ とおいて，$\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix}$ のように書く．このとき，適当な行列との積 $A\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix}$ は，

$$A\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\vec{a} & A\vec{b}\end{bmatrix}$$

である．（行列の積の計算方法を考えれば，これが成立することが納得できる筈．）

<u>問題 3.3</u>　ベクトル $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 A を求めよ．

◪　線型変換の“イメージ”

線型変換は，以下のように考えると理解しやすい．まず，

- x 軸正の向きの単位ベクトル $\vec{e}_x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
- y 軸正の向きの単位ベクトル $\vec{e}_y = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

※　これらは標準基底と呼ばれる．

について，行列 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ の表す線型変換 f によって，それぞれどのようなベクトルに写されるか，調べてみよう．

- $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$ なので，$f: \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$ （$= \vec{a}$ とおく）．
- $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ なので，$f: \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ （$= \vec{b}$ とおく）．

以上を踏まえて，ベクトル $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が，f によって，どのようなベクトルに写されるか考える．

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xf\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yf\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} \end{aligned}$$

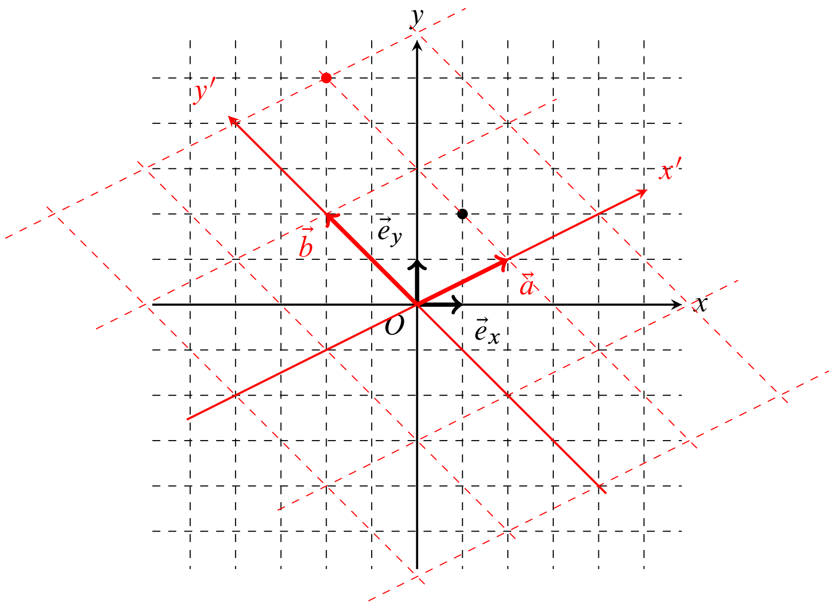
とできる．これは，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表される線型変換 f によって，

点 (x, y)（原点から $\vec{e}_x$ 方向に x，$\vec{e}_y$ 方向に y 進んだ点）

が

原点から $\vec{a}$ 方向に x，$\vec{b}$ 方向に y 進んだ点

に移された，と考えることができる（下図参照）．



問　$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$ のとき，

$$f(k\vec{x} + \ell\vec{y}) = kf(\vec{x}) + \ell f(\vec{y}) \qquad (k, \ell \text{ は定数})$$

であることを示せ．

◪ さまざまな変換の行列表現

- **偏倍変換**

例．任意の点 (x, y) を，x 座標を 2 倍，y 座標を 3 倍した点 (x', y') に移す変換.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **直線に関する対称変換**

例．任意の点 (x, y) を，x 軸に関して線対称である点 (x', y') に移す変換.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **恒等変換** (identity transformation)

例．任意の点 (x, y) を，それ自身に対応させる変換.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underset{\text{単位行列}}{\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **原点に関する対称変換**

例．任意の点 (x, y) を，原点に関して対称である点 (x', y') に移す変換.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **回転変換**　...... また今度.

- **その他**

例．任意の点 (x, y) を，$\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$ によって点 (x', y') に移す変換.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

問　点 P を，x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動した点 P' に移す変換は，線型変換か？

<u>問題 3.4</u>　次の線型変換を表す行列を求めよ.

(1)　任意の点 (x, y) を，y 軸に関して線対称である点 (x', y') に移す変換.

(2) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x - 2y \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x \end{cases}$

【例題 3.3】

ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に移す線型変換について，ベクトル $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の f による像を求めよ．

✍

問題 3.5

例題 3.3 のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ および線型変換 f について，ベクトル $\vec{a} + 2\vec{b}$ の f による像を求めよ．

【例題 3.4】

行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ f, g とするとき，直線 $y = -x + 1$ は，f, g によってそれぞれどのような図形に移されるか．

（線型変換 f による図形 G 上の各点の像全体が作る図形 G' を，f による G の像という．）

✍

問題 3.6　次の像を求めよ．

(1)　行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $y = x + 1$ の像

(2)　行列 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $2x + y = 1$ の像

参考：ベクトルの公理的取り扱い ....

集合 $\mathcal{V}$ が次の条件（公理）を満たすとき，$\mathcal{V}$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間（線型空間）といい，$\mathcal{V}$ の元をベクトルと呼ぶ．ただし，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ である．

(I) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ に対して和 $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

(i) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$　（交換律）；

(ii) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$　（結合律）；

(iii) 零ベクトルと呼ばれる特別な元 $\vec{0}$ がただ一つ存在し，任意の $\vec{x} \in \mathcal{V}$ に対して $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$；

(iv) 任意の $\vec{x} \in \mathcal{V}$ に対し $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$ なる $\vec{x}' \in \mathcal{V}$ がただ一つ存在する（これを $\vec{x}$ の逆ベクトルといい，$-\vec{x}$ と表す）．

(II) $\vec{x} \in \mathcal{V}, a \in \mathbb{K}$ に対して定数倍（スカラー倍）$a\vec{x} \in \mathcal{V}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

(v) $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$；

(vi) $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$；

(vii) $(ab)\vec{x} = a(b\vec{x})$；

(viii) $1\vec{x} = \vec{x}$．

さらに，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への写像 $\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{T}$ を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への線形写像という．

(i) $\mathcal{T}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{T}\vec{x} + \mathcal{T}\vec{y}$；

(ii) $\mathcal{T}(a\vec{x}) = a(\mathcal{T}\vec{x})$．

特に，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ 自身への線型写像を，線型変換という．◇

◪ ここまでのまとめ

平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（あるいは点 $P\,(x,y)$）は，線型変換 f によって，$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x',y')$）へと写される．このことを，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \qquad \text{あるいは} \qquad P' = f(P)$$

などのように書く．なお，この線型変換 f は，必ず 2×2 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表される．このとき，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

である．

◪ 図形の変換

これまで考えていた「点」も図形だけど......

【例題 3.4】

行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ f, g とするとき，直線 $y = -x+1$ は，f, g によってそれぞれどのような図形に移されるか．

（線型変換 f による図形 G 上の各点の像全体が作る図形 G' を，f による G の像という．）

✍

問題 3.6　次の像を求めよ．

(1)　行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $y = x+1$ の像

(2)　行列 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $2x + y = 1$ の像

3.2　線型変換の合成：合成変換

cf.　合成関数 $g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$

線型変換 f によって，平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（あるいは点 $P\,(x,y)$）が $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x',y')$）に移され，さらに線型変換 g によって，$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x',y')$）が $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$（$P''\,(x'',y'')$）に移されるとする：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = g\left(f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right).$$

このとき，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ に対応させる変換 h を，f と g の合成 (composition) 変換といい，$g \circ f$ と表す：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = g\left(f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right).$$

ここで，線型変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$g$ を表す行列を $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = (g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= g\left(f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= g\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり（ただし，$BA = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ とおいた)，$\boxed{\text{合成変換 } g \circ f \text{ は行列 } BA \text{ で表される}}$ ことが分かる．

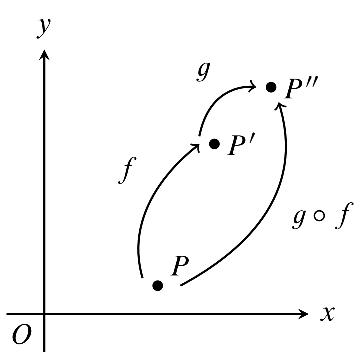
【例題 3.5】

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の表す線型変換をそれぞれ f, g とする．これらの変換について，合成変換 $g \circ f$ を表す行列を求めよ．

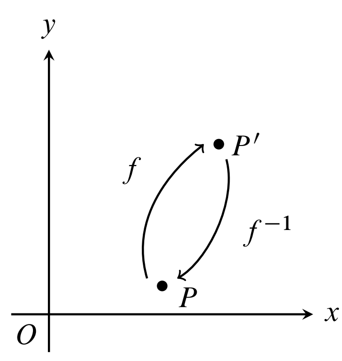
✍

<u>問題 3.7</u>　例題 3.5 の f, g について，合成変換 $f \circ g$ を表す行列を求めよ．

※　一般に，$BA \neq AB$ であり，$g \circ f \neq f \circ g$ である．



合成変換．



逆変換．

3.3 線型変換の逆変換

行列 A の表す線型変換 f によって，ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（点 $P\,(x, y)$）が $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）に移され，また行列 B の表す線型変換 g によって，逆に $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）が $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（$P\,(x, y)$）に戻される状況を考える．すなわち，

$$g \circ f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

であり，$g \circ f$ は恒等変換になっている．このとき，g を f の逆変換 (inverse transformation) といい，f^{-1} で表す．（$f^{-1} \circ f$ は恒等変換.）

また f^{-1} を表す行列について，恒等変換 $g \circ f = f^{-1} \circ f$ を表す行列が $BA = I$ であることより，$B = A^{-1}$，すなわち $\boxed{f^{-1}\text{ を表す行列は } A^{-1}\text{（}A\text{ の逆行列）である}}$ ことが分かる．なおこのことは，

$$\text{行列 } A \text{ の表す線型変換 } f \text{ が逆変換をもつ} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ は正則行列である}$$

を意味している．逆に，「A が正則行列である $\Longrightarrow$ A の表す線型変換 f は逆変換をもつ」も成立する．よって，

$$\text{行列 } A \text{ の表す線型変換 } f \text{ が逆変換をもつ} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ は正則行列である .}$$

【例題 3.6】

線型変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，点 $P'\,(2, -1)$ に移される元の点 $P\,(x, y)$ の座標を求めよ．

✍

<u>問題 3.8</u>　線型変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とする．このとき，点 $P'\,(-1, 4)$ に移される元の点 $P\,(x, y)$ の座標を求めよ．

<u>問題 3.9</u>　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とする．このとき，f によって，直線 $3x + y = 6$ に移される元の図形を求めよ．

<u>問題 3.9</u>　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とする．このとき，f によって，直線 $3x + y = 6$ に移される元の図形を求めよ．

✍

◪　ここまでのまとめ②

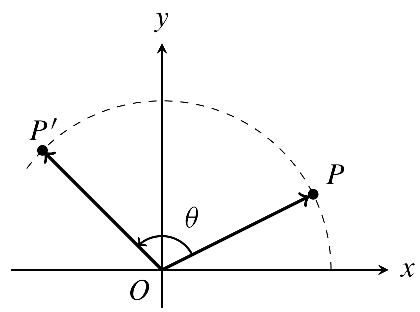
- 線型変換 f　$\longleftrightarrow$　行列 A
- 合成変換 $g \circ f$　$\longleftrightarrow$　積 BA
- 逆変換 f^{-1}　$\longleftrightarrow$　逆行列 A^{-1}

<u>問題 3.10</u>　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ f, g とする．このとき，変換 $f^{-1}, g^{-1}, (f \circ g)^{-1}$ によって点 $(1, 0)$ はどのような点に移されるか．

※　合成変換，逆変換の意味を考えれば，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である．これは，行列の計算規則 $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ とも符合する．

3.4　回転変換

◪　平面ベクトルの回転（平面上の点の原点まわりの回転移動）



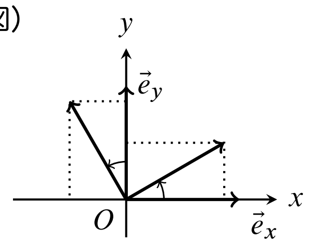
左図のように，座標平面上で，ベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転したベクトルを $\overrightarrow{OP'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ とする．

同じことであるが，点 $P\,(x, y)$ を原点のまわりに θ 回転した点を $P'\,(x', y')$ とする，ということもできる．

ここで，2 つのベクトル $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ について，これらを θ 回転させることを考える．

- $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$
- $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

（参考図）



したがって（回転変換が線型変換であることを認めると），ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転するという操作は，行列 $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を用いて，

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

とわかる．

※　回転変換が線型変換であることは，次のように確かめられる：

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha$$

とおくと，

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

◇

例.　平面ベクトルを［座標平面上の点を原点のまわりに］$\dfrac{\pi}{6}$ 回転する線型変換を表す行列は，

$$R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

問題3.11

座標平面上の点を原点のまわりにそれぞれ $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \pi, -\dfrac{\pi}{4}$ 回転する線型変換を表す行列を求めよ．

◪　空間ベクトルの回転（空間内の点の回転移動）

☞　教科書 p. 157

空間ベクトルの回転は，平面ベクトルの回転ほど単純ではない．実は，空間ベクトルの回転は原点を通るある直線まわりの回転である．

（略）

◪ 回転変換の合成

座標平面上でベクトル $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ を θ 回転し，さらにそのベクトル $\overrightarrow{OP'}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ を φ 回転し，ベクトル $\overrightarrow{OP''}=\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}$ を得ることを考えよう．このとき，

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}_{R_\theta}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}}_{R_\varphi}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$

であり，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}&=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}_{R_\varphi R_\theta}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & -(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)\\ \sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\end{aligned}$$

が成立する．他方，ベクトル $\overrightarrow{OP''}$ は，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $(\theta+\varphi)$ 回転したベクトルともいえるので，

$$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{bmatrix}}_{R_{\theta+\varphi}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

以上より，

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & -(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)\\ \sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\end{bmatrix}.$$

この両辺を比較すると，三角関数の加法定理

$$\begin{cases}\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi\end{cases}$$

が得られる．

◪ 回転変換の逆変換

座標平面上でベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転する変換の逆変換は，ベクトルを $-\theta$ 回転する変換である．実際，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}}_{{R_\theta}^{-1}} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}}_{R_{-\theta}}$$

【例題 3.7】

原点 O と点 $A\,(1,3)$ に対して，$\triangle OAB$ が正三角形になるような点 B の座標を求めよ．

✍

◪ 回転変換の性質（まとめ）

- $R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha = R_\alpha R_\beta$
- ${R_\theta}^{-1} = R_{-\theta}$
- $R_{2\pi n} = I \quad (n \in \mathbb{Z})$
- $\det R_\theta = 1$

問　以上を示せ．

cf.　$R_\theta \longleftrightarrow e^{i\theta}$

3.5 直交変換

直交行列によって表される線型変換を，直交変換 (orthogonal transformation) という．

◪ 直交行列

直交行列 (orthogonal matrix) とは，

$$A^{\mathsf{T}}A = I \qquad (A^{\mathsf{T}} \text{ は } A \text{ の転置行列}) \tag{$*$}$$

すなわち，$A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ を満たす正方行列 A のことをいう．

例. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (θ 回転)，$\dfrac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix}$ (直線 $y = mx$ に関する線対称移動)，
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (置換行列；$m = 1$ の場合)

問　これらの行列が直交行列であることを確かめよ．

◪ 内積と直交行列

復習：　平面ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して，$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 (inner product; dot product) という．（より正確には，標準内積という．）内積は 1 つの数 である．

（復習終わり）

ここで，行列の計算を思い出すと，

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (\leftarrow \text{行列の積})$$

の形で書けることがわかる．$\vec{a}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ であることより，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{b}$$

と書き表すこともできる． ◇

($*$) の左辺について，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とすると，

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{bmatrix}.$$

これが単位行列になることから，以下の定理が導かれる：

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \text{が直交行列である} \quad \Longleftrightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \quad \text{かつ} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$ ◇

【例題 3.8】

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．

✍

<u>問題3.12</u> $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．

◪ 直交変換の性質

復習： ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ の大きさ（長さ）$|\vec{a}|$ は，

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

によって計算される． （復習終わり）

A を直交行列とし，f を A で表される線型変換とすれば，どんな平面ベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ に対しても，

$$f(\vec{x})\cdot f(\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

が成立する．なぜなら，

$$f(\vec{x})\cdot f(\vec{y}) = A\vec{x}\cdot A\vec{y} = \left(A\vec{x}\right)^{\mathsf{T}} A\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}} I\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}\,.$$

つまり直交変換は，内積を変えない，すなわち，

ベクトルたちの 大きさ も なす角 も変えない変換

であるといえる．

～おまけ～

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ のとき，ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の内積（標準内積）は，

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \overline{a_1}b_1 + \overline{a_2}b_2$$

で定義される（他の定義もある）．

B　Additional Topics （後期中間）

B.1　例題 3.2 再考

【例題 3.2（再掲）】

ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 A を求めよ．

※　行列のベクトルへの分割

2 次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について，$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とおいて，$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ のように書く．このとき，適当な行列 A との積 $A\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ は，

$$A\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{a} & A\vec{b} \end{bmatrix}$$

である．（行列の積の計算方法を考えれば，これが成立することが納得できる筈．）

✍

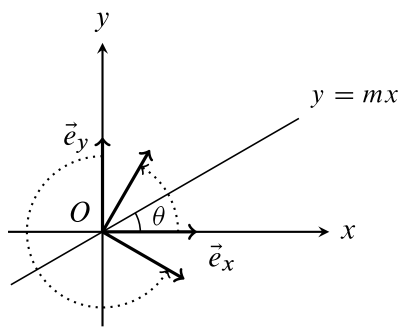
問　配布プリントの問題 3.3，及び教科書 p. 136 練習問題 1A の大問 3 をこの方法で解け．

B.2　直線 $y = mx$ に関する線対称移動を表す行列

前回の授業では，$\dfrac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix}$ が直交行列の例であることを紹介した．ここでは，この行列が，直線 $y = mx$ に関する線対称移動を表すことを確認しよう．

✍

（参考図）



B.3　線型変換を表す行列の行列式

線型変換 f を表す行列を，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．このとき，A の行列式：

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ ,$$

の意味を考えよう．A の行列式は，$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の符号付き面積 (signed area) を表すのであった．他方，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は，線型変換 f による $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の像である．

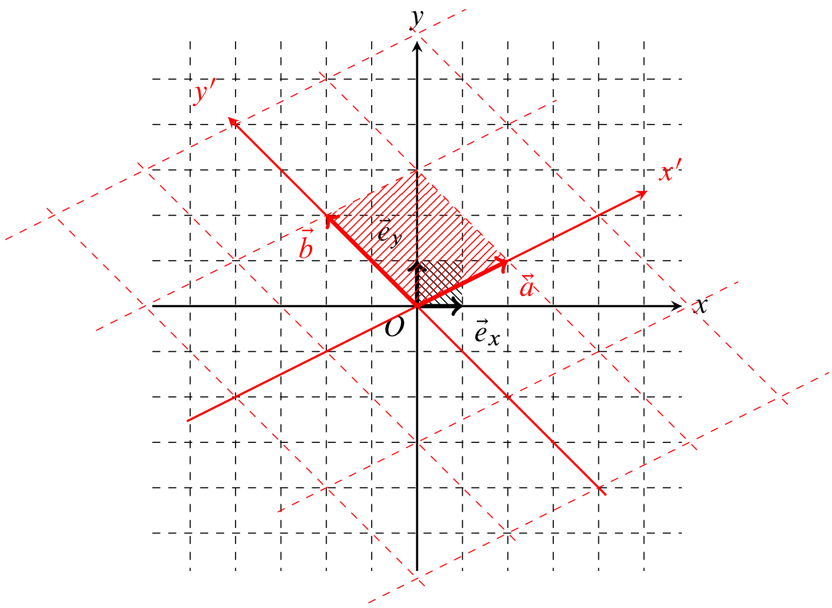
以上から，

A の行列式の絶対値 $|\det A|$ は，下図の赤斜線部（　）の面積を表している

ことがわかる．さらに，$\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ の張る平行四辺形（正方形；下図の黒斜線部　）の面積が 1 であることから，

$|\det A|$ は，行列 A が表す線型変換による，図形の面積の拡大率を表している

といえる．



問　教科書 p. 137 練習問題 1B の大問 3 を解け．

4　固有値とその応用

4.0　イントロダクション

後期中間試験の **問 6** では，次のような問題を出題しました：

問 6.　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とするとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の f による像 $\vec{p}\,' = f(\vec{p})$ を求めよ．　　答：　$\vec{p}\,' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) ベクトル $\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の f による像 $\vec{q}\,' = f(\vec{q})$ を求めよ．　　答：　$\vec{q}\,' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

答えをよく観察してみると，

(1)　$\vec{p}\,' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{p}$ であり，　$\vec{p}\,' \mathbin{/\!/} \vec{p}$

(2)　$\vec{q}\,' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\vec{q}$ であり，　$\vec{q}\,' \mathbin{/\!/} \vec{q}$

となっていることに気が付きます．このように，

線型変換を施しても，方向 ※ が変わらないベクトルがある　— ①

ようです．ただし，ベクトルの大きさは変わっています．

では，線型変換で方向が変わらないベクトルたちについて，

線型変換によって，① のベクトルは，何倍になるか？　— ②

は，実際に線型変換をしてみないと判らないのでしょうか．実は，この倍率は線型変換に固有の量で，線型変換（を表す行列）の情報だけで求めることができます．その求め方は，前期定期試験の **問 6**：

問 6.　次の連立 1 次方程式が非自明な解（$x = y = 0$ 以外の解）をもつような定数 k の値を求めよ．

$$\begin{cases} (1-k)x + 2y = 0 \\ -x + (4-k)y = 0 \end{cases}$$

答：　$k = 2$ または $k = 3$

と同様です（この話をするために，意図してこれらを出題していました；伏線回収）．

※　方向 (direction) と向き (sense) とは区別して用いる．方向は，東西方向や南北方向というように用い，向きは，東西方向のうち東向きや西向きというように用いる．つまり，1 つの方向に 2 つの向きがある．

4.1　固有値問題

◪　固有値・固有ベクトル

正方行列 A について，ベクトル $\vec{x}$ $(\neq \vec{0})$ が

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

を満たすとき，

② $\overset{\text{ラムダ}}{\lambda}$ を固有値 (eigenvalue)

① $\vec{x}$ を，固有値 λ に属する固有ベクトル (eigenvector)

と呼ぶ．

◪　固有ベクトルのありがたさ

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ で表される線型変換によって，平面ベクトル $\vec{x}$ を変換することを考える．$\vec{x}$ を，（いつものように）

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と分解すると，$A\vec{x}$ は

$$A\vec{x} = A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xA\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yA\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

と計算される．このとき，係数 x, y が不変であるというメリットはあるものの，線型結合をとるベクトル（≒基準となるベクトル）が変わってしまうという不便もある．

他方で，固有ベクトルを用いて，$\vec{x}$ を

$$\vec{x} = u\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と分解すると（$u = x - y, v = 2y - x$），$A\vec{x}$ は

$$A\vec{x} = A\left(u\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = uA\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + vA\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2u\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3v\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり，線型結合をとるベクトルを変えることなく，変換後のベクトル（像）を求めることができる．

正方行列の全ての固有値とそれに属する固有ベクトルを求める問題を，固有値問題という．

◪ 固有値問題の解き方

正方行列 A の固有値 λ とそれに属する固有ベクトル $\vec{x}$ を求めることを考える．$A, \lambda, \vec{x}$ は，

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad \text{（← 固有値方程式と呼ぶことがある．）}$$

を満たすのであった．これを変形すると，

$$\begin{aligned} A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \\ &\Longleftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0} \qquad \text{（I は単位行列．）} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \qquad \text{（これは連立 1 次方程式．）} \end{aligned}$$

を得る．この型の連立 1 次方程式が，非自明な解（$\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解）をもつための必要十分条件は，

$$\underbrace{|A - \lambda I|}_{\text{行列式}} = 0$$

である．これは，λ の多項式（次数は，正方行列 A の次数と等しい）であり，A の固有多項式，あるいは固有方程式（固有値 λ を求める方程式という意味）と呼ばれる．

固有値問題を解く手順

1. 固有方程式 $|A - \lambda I| = 0$ を解いて，固有値 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を求める．
2. それぞれの固有値 λ_j に対して，連立 1 次方程式 $(A - \lambda_j I)\vec{x} = \vec{0}$ を解いて固有ベクトル $\vec{x} = \vec{x}_j$ を求める．

【例題 4.1】

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

✍

問題4.1　次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$　　　　(2)　$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

【例題 4.2】

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

✍

問題 4.2　次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$　　(2)　$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

◪ 固有値問題の解き方 — 特に固有方程式が重解をもつ場合

【例題 4.3】

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

✍

※　固有値 2 の重複度は $\underline{\underline{2}}$ である，という（固有方程式の $\underline{\underline{2}}$ 重解に対応）．
他方，固有値 -4 の重複度は 1 である．

問題 4.3　次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　(2)　$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

◪ 固有値問題の解き方 — 特に固有値が虚数になる場合

【例題 4.4】

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

✍

4.2　固有ベクトルの性質

定理（固有ベクトルの線型独立性）．A の異なる固有値に属する固有ベクトルは線型独立である．$\diamond$

説明　2 次の場合かつ異なる固有値が 2 個ある場合について，上の定理を証明する．　*cf.* 教科書 p.144

λ_1, λ_2 を 2 次正方行列 A の異なる固有値，各 λ_j に対する固有ベクトルを $\vec{x}_j$ とする．このとき，

$$A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1\,,\quad A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2\,,\qquad (\vec{x}_1 \neq \vec{0}\,,\ \vec{x}_2 \neq \vec{0})$$

が成り立っている．

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ が線型独立であることを示すには，「$a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 = \vec{0}$ ならば $a = b = 0$」が言えればよい．

- まず，$\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ より，$a\vec{x}_1 = \vec{0}$ ならば $a = 0$ である．
- 次に，$a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 = \vec{0}$ において，両辺に左から A を掛けると，$a\lambda_1\vec{x}_1 + b\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$.
  他方，両辺に λ_2 を掛けると，$a\lambda_2\vec{x}_1 + b\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$．これらの辺々を引いて，$a(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$.
- よって，$a(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$．$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $a = 0$ なので，$0\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 = b\vec{x}_2 = \vec{0}$.
  $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$ より，$b\vec{x}_2 = \vec{0}$ ならば $b = 0$ である．
- 以上より，$a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 = \vec{0}$ ならば $a = b = 0$ であり，$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ は線型独立である．

問　3 次の場合について，上の定理を証明せよ．
　※ 一般に n 次の場合を示すには，数学的帰納法を用いればよい．

例 1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ の異なる固有値に属する固有ベクトル $\vec{x}_1 = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\vec{x}_2 = c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，

$$\det\begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 2c_1c_2 - c_1c_2 = c_1c_2 \neq 0 \qquad \therefore\quad \vec{x}_1 \text{ と } \vec{x}_2 \text{ は線型独立.}$$

例 2. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ の異なる固有値に属する固有ベクトル $\vec{x}_1 = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = c_2\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x}_3 = c_3\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，

$$\det\begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -c_1 & -3c_2 & -2c_3 \\ c_1 & 4c_2 & 2c_3 \\ c_1 & 3c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \cdots = c_1c_2c_3 \neq 0 \qquad \therefore\quad \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \text{ は線型独立.}$$

例 3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の異なる固有値に属する固有ベクトル $\vec{x}_1 = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\vec{x}_2 = c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & c_3 \\ 1 & 0 & -2c_3 \\ 0 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = c_3 + c_3 + 4c_3 = 6c_3 \neq 0 \qquad \therefore\quad \vec{x}_1 \text{ と } \vec{x}_2 \text{ は線型独立.}$$

4.3 行列の対角化

正方行列 A を対角行列（対角成分以外の成分がすべて 0 である行列；diagonal matrix）にすることを，行列 A の対角化 (diagonalization) という．

◪ 対角化の方法

2 次の場合で説明する．

2 次正方行列 A が異なる固有値 λ_1, λ_2 をもち，各 λ_j に対する固有ベクトルを $\vec{x}_j$ とする．前節で示したように，$\vec{x}_1$ と $\vec{x}_2$ は線型独立であり，$P = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{bmatrix}$ は正則である．P に左から A を掛けると，

$$AP = A\begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{x}_1 & \lambda_2\vec{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

よって，2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が対角化できた：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{対角化}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

※ P のことを対角化行列 (diagonalizing matrix) と呼ぶことがある．

※ 対角化された行列 $P^{-1}AP$ では，対角成分に P の各列の固有ベクトルに対応する固有値が並ぶ．

【例題 4.5】

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ について，対角化行列を求めて対角化せよ．

✍

<u>問題 4.4</u> $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ について，対角化行列を求めて対角化せよ．

<u>問題 4.5</u> 次の行列について，対角化行列を求めて対角化せよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

【例題 4.6】

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ について，対角化行列を求めて対角化せよ．

✍

問題 4.6　次の行列について，対角化行列を求めて対角化せよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$　　(2)　$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

◪　対角化可能性

A が対角化できるとき（そのような正則行列 P が存在するとき），A は対角化可能 (diagonalizable) であるという．

定理（対角化可能の条件）．n 次正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は，A が n 個の線型独立な固有ベクトルをもつことである． ◇

説明　固有方程式が重解をもたないとき，前項の方法で，対角化行列 P を定めることができ，$P^{-1}AP$ によって行列 A を対角化できる（4 次以上の場合も同様）．

他方，固有方程式が重解をもつときは，A は必ずしも対角化可能ではない．ただし，例題 4.3 や問題 4.3 (1) のように，2 重解に対する固有ベクトルが 2 つの線型独立なベクトルの線型結合の形で書けるとき，正則行列 P を定めて A を対角化することができる．問題 4.3 (2) のような場合には，正則行列 P を定めるのに十分な個数の線型独立なベクトルを用意できず，A を対角化することはできない．

【例題 4.7】

次の行列について，対角化可能な場合は対角化せよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　(2)　$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

✍

問題 4.7　次の行列について，対角化可能な場合は対角化せよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　　(2)　$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4.4　対称行列の直交行列による対角化

※ より正確には「実対称行列」

復習（対称行列）　$A^{\mathsf{T}} = A$ を満たす正方行列 A を対称行列 (symmetric matrix) という． ◇

復習（固有ベクトルの線型独立性）　A の異なる固有値に属する固有ベクトルは線型独立である． ◇

定理（対称行列の固有ベクトルの直交性）．
対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する． ◇

証明　正方行列 A の異なる固有値を λ, μ とし，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを $\vec{x}, \vec{y}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) &= (\lambda\vec{x})\cdot\vec{x} = (A\vec{x})\cdot\vec{y} = (A\vec{x})^{\mathsf{T}}\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\vec{y} \\ &= \vec{x}^{\mathsf{T}}A\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}}(A\vec{y}) = \vec{x}\cdot(A\vec{y}) = \vec{x}\cdot(\mu\vec{y}) = \mu(\vec{x}\cdot\vec{y}) \\ \therefore\quad (\lambda-\mu)(\vec{x}\cdot\vec{y}) &= 0\,.\end{aligned}$$

仮定より $\lambda \neq \mu$ なので，$\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$．すなわち，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ とは直交する． ■

定理（対称行列の直交行列による対角化）．
任意の対称行列は，適当な直交行列によって対角化可能である． ◇

説明　3 次の場合かつ異なる固有値が 3 個ある場合について，上の定理を確認する．

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を 3 次正方行列 A の異なる固有値，各 λ_j に対する固有ベクトルを $\vec{x}_j = c_j\vec{x}'_j$ とする．ここで，$|\vec{x}_j| = 1$ となるように係数 c_j を選ぶことにする．このとき，

$$\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 = \vec{x}_2\cdot\vec{x}_3 = \vec{x}_3\cdot\vec{x}_1 = 0\,,\quad |\vec{x}_1| = |\vec{x}_2| = |\vec{x}_3| = 1$$

なので，対角化行列：

$$P = \begin{bmatrix}\vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3\end{bmatrix} \qquad \text{（これを特に } T \text{ と書く．）}$$

は，直交行列 ($T^{\mathsf{T}} = T^{-1}$) である．

よって，行列 A を T によって対角化すると，

$$T^{-1}AT = T^{\mathsf{T}}AT = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

対称行列の場合には，固有方程式が重解をもつ場合にも，直交行列で対角化できることが知られている．

※　実行列であってもその固有値は虚数になることがあるが（例題 4.4），実対称行列の場合には，固有値は必ず実数となることが知られている．

問　このことを証明せよ．

【例題 4.8】

次の行列について，直交行列により対角化せよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

考え方 $A^{\mathsf{T}} = A,\ B^{\mathsf{T}} = B$ なので，A, B は共に対称行列である．

✍

※ Grum–Schmit（グラム シュミット）の正規直交化法

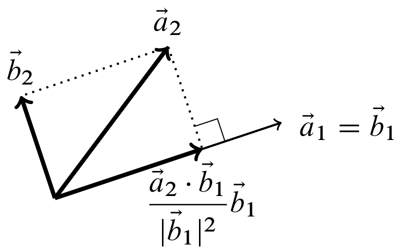
線型独立な空間ベクトル $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ から，全てのベクトルの大きさが 1 でそれらが互いに直交している 3 つの空間ベクトル $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ を構成する方法を紹介する．

まず $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ から，互いに直交している 3 つの空間ベクトル $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ を作る：

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1\,,\quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1\,,\quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_2|^2}\vec{b}_2\,.$$

次に，これらのベクトルの大きさが 1 になるように定数倍して，$\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ を得る：

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{|\vec{b}_1|}\vec{b}_1\,,\quad \vec{c}_2 = \frac{1}{|\vec{b}_2|}\vec{b}_2\,,\quad \vec{c}_3 = \frac{1}{|\vec{b}_3|}\vec{b}_3\,.$$



問題4.8 次の対称行列について，直交行列により対角化せよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

よいお年を．

4.5 対角化の応用

◪ 2 次形式の標準化（応用①）

変数 x, y について，次の形の 2 次式：

$$F = ax^2 + bxy + cy^2$$

を 2 次形式 (quadratic form) という．2 次形式 F は，

$$F = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x}\,, \quad A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\,, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と，対称行列 A を用いて表すことができる．

対称行列は適当な直交行列によって対角化できるので，A が直交行列 T によって

$$A \quad \longrightarrow \quad D = T^{\mathsf{T}} A T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

と対角化されたとしよう．このとき，$A = TDT^{\mathsf{T}}$ なので，

$$F = \vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x} = \vec{x}^{\mathsf{T}} T D T^{\mathsf{T}} \vec{x} = (T^{\mathsf{T}} \vec{x})^{\mathsf{T}} D (T^{\mathsf{T}} \vec{x})\,.$$

ここで，$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^{\mathsf{T}} \vec{x}$ とおくと，

$$F = \vec{x}'^{\mathsf{T}} D \vec{x}' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \alpha x'^2 + \beta y'^2$$

と変形できる．これを，2 次形式 F の標準形 () と呼ぶ．

【例題 4.9】

次の 2 次形式の標準形を求めよ．

$$3x^2 - 2xy + 3y^2$$

✍

➡注 $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$ である．これを直接代入すれば，$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2x'^2 + 4y'^2$ となることが分かる．

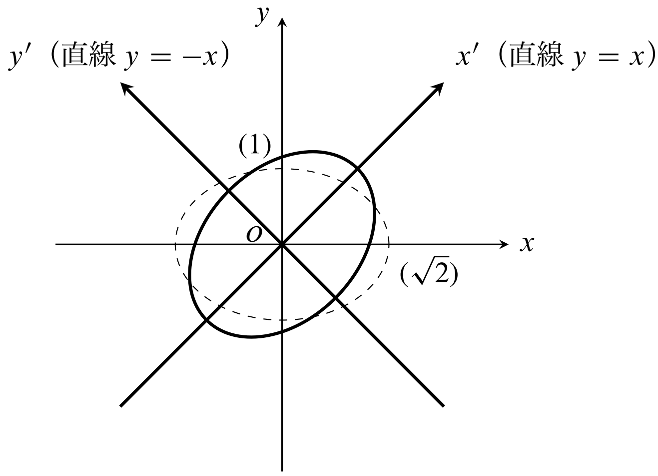
問題 4.9 次の 2 次形式の標準形を求めよ．また，x, y を x', y' で表せ．

(1) $x^2 + 4xy + y^2$ (2) $3x^2 - 4xy + 6y^2$

➡注　例えば，$\boxed{\text{曲線 } C : 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4 \text{（2 次曲線）}}$ は，

$$2x'^2 + 4y'^2 = 4 \qquad i.e. \qquad \frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$$

と表される．x' 軸, y' 軸が，x 軸, y 軸を O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであることから，曲線 C は $\boxed{\text{楕円 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ を } O \text{ のまわりに } \frac{\pi}{4} \text{ 回転させた図形}}$ であることが分かる．



問題 4.10　$2x^2 + 2xy + 2y^2$ の標準形を求め，2 次曲線 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ の概形をかけ．

問題 4.11　xy の標準形を求め，反比例 $y = \frac{1}{x}$ のグラフが双曲線となることを確かめよ．

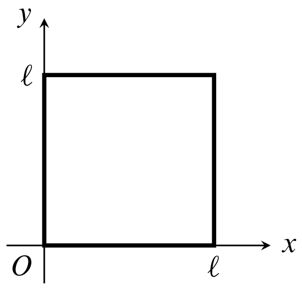
※　「2 次形式の標準化」の応用　　— *cf.* 力学の教科書

【例題 4.10 （剛体の慣性主軸）】

一辺 ℓ，質量 M の，一様で厚さの無視できる正方形の剛体面が，右下図のように座標平面上に置かれている．

(1)　原点 O のまわりでの慣性テンソルを求めよ．

(2)　この剛体の，原点 O に関する慣性主軸と主慣性モーメントを求めよ．



答.　(1)　$\frac{1}{12}M\ell^2 \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$　　(2)　慣性主軸：直線 $y = x$, $y = -x$, z 軸

主慣性モーメント：(順に) $\frac{1}{12}M\ell^2$, $\frac{7}{12}M\ell^2$, $\frac{2}{3}M\ell^2$

◪ A^n 乗の計算（応用②）

【例題 4.11】

行列 $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ について A^n を求めよ．$(n = 1, 2, \ldots)$

考え方　A を対角化行列 P によって対角化する．その対角行列を $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ と書くと，

$$D = P^{-1}AP \qquad \therefore \quad A = PDP^{-1} .$$

これを用いれば，

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^n P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} P^{-1} .$$

✍

問題 4.12　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ について A^n を求めよ．$(n = 1, 2, \ldots)$

※　「A^n 乗の計算」の応用　　　　— A^n が計算できて，何がうれしいのか？

【例題 4.12（Fibonacci 数列）】

はじめの 2 項が 1 で，3 項目以降は直前の 2 項の和である数列を Fibonacci 数列という．すなわち，

$$a_1 = 1 , \quad a_2 = 1 , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

この数列の一般項を求めよ．ただし，便宜上，$a_0 = 0$ としてよい．

考え方　漸化式を $\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$ と書き直す．これを用いると，

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

よって，$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ が計算できればよいことが分かる．

答．　$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

【例題 4.13 （院試の過去問の改題；東大工）】

ある年，急にジョギングが流行しだした．そこで，ジョギング人口の推移を毎年 1 回調べることにしたところ，1 年経つと，いつも前の年にジョギングをやっていた人の 4 割が脱落し，やっていなかった人のうち 2 割が思い立ってジョギングを始めることがわかった．

n 年後のジョギング人口，非ジョギング人口をそれぞれ a_n, b_n とし，全人口は不変であると仮定して以下の問いに答えよ．

(1)　1 年後のジョギング人口，非ジョギング人口を表す式を

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

と書くとき，行列 A を具体的に求めよ．（a_0, b_0 は現時点でのジョギング人口，非ジョギング人口を表す.）

(2)　A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3)　A を対角化し，n 年後のジョギング人口分布

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

を求める式を具体的に書け．

(4)　(3) の結果から，何年か経過するとジョギング人口が定着することがわかる．定着したジョギング人口，非ジョギング人口の割合を，$n \to \infty$ のときのジョギング人口比で近似できるものとして求めよ．

答.　(1) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$　(2) 固有値 $\frac{2}{5}$ に対する固有ベクトル $(1, -1)$
固有値 1 に対する固有ベクトル $(1, 2)$

(3) $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$　(4) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

問　「脱落する人」「始める人」の割合が変わると，上の結果はどうなるだろうか？
あるいは，「全人口は不変」という仮定を変えるとどうなるだろうか？ ほかにも，さまざまな条件を変え（または加え），上の結果がどうなるか調べてみると面白い（かもしれない）．

4.6　固有値の性質

固有値に関して，次の性質が知られている：

n 次正方行列 A の n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とするとき，

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}\, A\,, \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A\,. \qquad \diamond$$

説明　対角化可能な場合に限って証明する．以下，P を A の対角化行列とし，$D = P^{-1}AP$ とする．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, D &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\
&= \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \mathrm{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{tr}\, A\,, \\
\det D &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\
&= \det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1}\cdot\det A\cdot\det P = \frac{1}{\det P}\cdot\det A\cdot\det P = \det A\,.
\end{aligned}$$

例 1.　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値は，2 と 3．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, A &= 1 + 4 = 5 = 2 + 3\,, \\
\det A &= 1\cdot 4 - 2(-1) = 6 = 2\cdot 3\,.
\end{aligned}$$

例 2.　$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値は，1, 2, 3．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, B &= 2 + 5 + (-1) = 6 = 1 + 2 + 3\,, \\
\det B &= -10 + 12 - 20 + 24 = 6 = 1\cdot 2\cdot 3\,.
\end{aligned}$$

例 3.　$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は，-4 と 2（固有方程式の 2 重解）．

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, C &= 1 + (-2) + 1 = 0 = -4 + 2 + 2\,, \\
\det C &= -2 - 4 - 4 + 2 - 4 - 4 = -16 = -4\cdot 2\cdot 2\,.
\end{aligned}$$

※　固有値問題を解いた後，固有値・固有ベクトルの定義・性質を用いて**検算**ができる．

〜余談〜

みなさん，ご成人おめでとうございます．（とはいえ，20 歳になるまでは，あまり成人した実感はないかも？）お祝いの言葉という訳ではないですが，少し余談を．

幕末の志士・橋本左内（福井藩出身）は，『啓発録』の中で，立派な大人になるための心得として

稚心を去る・気を振う・志を立てる・学を勉める・交友を択ぶ

の 5 つを挙げています．彼がこれを書いたのは，15 歳のとき（25 歳で死罪；安政の大獄）．それまでの自身を反省して書いたとか．なかなか 15 歳にできることではないですねぇ．

書き過ぎると説教臭くなるのでこの辺で．よかったら『啓発録』を読んでみてください．