2024年度　数学B　後期定期試験

（実施日：2025年1月31日）

得点	

3年＿＿科　整理番号：＿＿＿　学籍番号：＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意： 試験時間は **50分** です．問題用紙は **2枚** あります．両方ともに記名してください．
解答欄に最終的な答えを書いてください．特に断りがない限り，最終的な答えに至る過程も採点対象です．与えられた余白に，計算式や考え方などを，採点者に伝わるように書いてください．

*** If you need English assistance, see page 6.**

問1. 固有値・固有ベクトルの定義について，以下の空欄に当てはまる式を書け．　[5点]

正方行列 A について，

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

を満たす零ベクトルでないベクトル $\vec{x}$ が存在するとき，λ を A の固有値，$\vec{x}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルという．

問2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．　[12点]

固有値 $\boxed{\quad}$ に対する固有ベクトル $\boxed{\quad}$

固有値 $\boxed{\quad}$ に対する固有ベクトル $\boxed{\quad}$

問 3. 次の行列の固有値を求めよ．（固有ベクトルは求めなくてよい．）　[6 点 × 3]

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

問 4. 2 つのベクトル $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，平行ではないが直交もしていない．$\vec{a}_1$ と直交するベクトルのうち，$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ で張られる平面内のベクトルの $\vec{b}_2$ を求めよ．ただし，$\vec{b}_2$ は

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1$$

で求められることを用いてよい．　[10 点]

問題は裏面にもあります．

問 5. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルは， [5 点 × 3]

固有値 1 に対する固有ベクトルは $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$， 固有値 4 に対する固有ベクトルは $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，

である $(c_1, c_2 \neq 0)$．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 対角化行列 P を書け．

(2) P^{-1} を求めよ．

(3) (1) の対角化行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ．

問 6. 対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを証明せよ． [7 点]
（ヒント：対称行列 A の異なる固有値を λ, μ，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{x}$, $\vec{y}$ とせよ．）

問題は 2 枚目にもあります．

（ 計 算 用 ）

※ 計算用のページは，**採点対象外**です．

3年___科　整理番号：____　学籍番号：________　氏名：________________

問 7. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルは，　[(1) 15 点，(2) 8 点]

固有値 1 に対する固有ベクトルは $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，　固有値 3 に対する固有ベクトルは $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

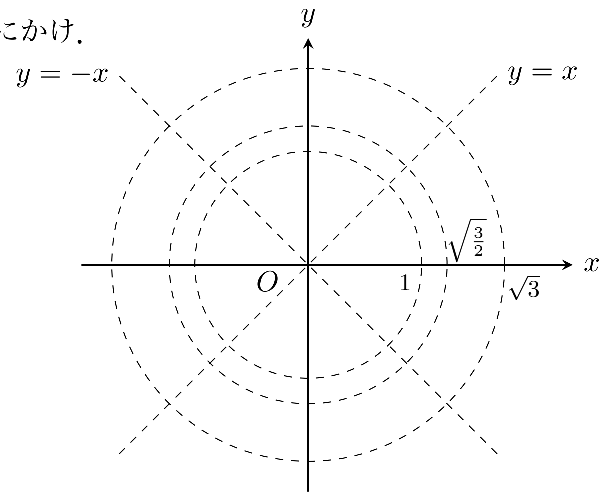
である $(c_1, c_2 \neq 0)$．このとき，2 次形式 $2x^2 + 2xy + 2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 標準形 $\alpha x'^2 + \beta y'^2$ を求めよ．また，x', y' を x, y を用いて表せ．

標準形：

$$\begin{cases} x' = \\ \\ y' = \end{cases}$$

(2) 曲線 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ の概形を右下図中にかけ．



問 8. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルは，

固有値 2 に対する固有ベクトルは $c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$，　固有値 5 に対する固有ベクトルは $c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

である $(c_1, c_2 \neq 0)$．このとき，A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．　[10 点]

問題は以上です．

※ Eɴɢʟɪsʜ Aѕѕɪѕᴛᴀɴᴄᴇ　（不要な方は，無視してください．）

NOTES:

This exam is **<u>50 minutes</u>** long. You have **<u>two exam papers</u>**. Write down your name on both of them. Your answers should be written in □, if provided. It is important to write down the processes of how you get the final results, because they are also to be evaluated.

<u>* You can answer the questions either in English or in Japanese.</u>

問 1. Fill in the blank.

Let A be a square matrix. If there exist a non-zero vector $\vec{x}$ such that

$$\boxed{}\ ,$$

$\vec{x}$ is called an **eigenvector** of A, and λ is the corresponding **eigenvalue**.

問 2. Find the eigenvalues and the eigenvectors of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

問 3. Find the eigenvalues of the following matrices. (You don't need to find the eigenvectors.)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

問 4. Two vectors $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ are neither parallel nor perpendicular. Find a vector $\vec{b}_2$, which is perpendicular to $\vec{a}_1$, on the plane spanned by $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. You can use the following formula:

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1\ .$$

問 5. The eigenvalues and the eigenvectors of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ are the following:

one eigenvalue is 1 with the eigenvector $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

the other eigenvalue is 4 with the eigenvector $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$(c_1, c_2 \neq 0)$. Answer the following questions about the matrix A.

(1) Write a diagonalizing matrix P.

(2) Find P^{-1}.

(3) Diagonalize the matrix A using P in (1).

問 6. Show that the eigenvectors of a symmetric matrix with different eigenvalues are orthogonal to each other.

(Hint: Let A be a symmetric matrix. Suppose λ, μ are the eigenvalues of A, and $\vec{x}$, $\vec{y}$ are the corresponding eigenvectors respectively.)

問 7. The eigenvalues and the eigenvectors of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ are the following:

one eigenvalue is 1 with the eigenvector $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

the other eigenvalue is 3 with the eigenvector $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$(c_1, c_2 \neq 0)$. Answer the following questions about a quadratic form $2x^2 + 2xy + 2y^2$.

(1) Find the diagonal form $\alpha x'^2 + \beta y'^2$. Also, express x', y' in terms of x, y.

(2) Draw a curve $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ in the figure provided.

問 8. The eigenvalues and the eigenvectors of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ are the following:

one eigenvalue is 2 with the eigenvector $c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

the other eigenvalue is 5 with the eigenvector $c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$(c_1, c_2 \neq 0)$. Evaluate A^n, with n being a positive integer.

（ 計　算　用 ）

※　計算用のページは，**<u>採点対象外</u>**です．

（ 計　算　用 ）　　※ 計算用のページは，**採点対象外**です．

自由記述欄（感想や要望など，奈須田に伝えたいことがある方はどうぞ）