2024年度　数学B　後期定期試験

（実施日：2025年1月31日）

得点	100

3年____科　整理番号：____　学籍番号：________　氏名：解答例

注意： 試験時間は **50分** です．問題用紙は **2枚** あります．両方ともに記名してください．

解答欄に最終的な答えを書いてください．特に断りがない限り，最終的な答えに至る過程も採点対象です．与えられた余白に，計算式や考え方などを，採点者に伝わるように書いてください．

*** If you need English assistance, see page 6.**

問1. 固有値・固有ベクトルの定義について，以下の空欄に当てはまる式を書け．　[5点]

正方行列 A について，

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$$

を満たす零ベクトルでないベクトル $\vec{x}$ が存在するとき，λ を A の固有値，$\vec{x}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルという．

問2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．　[12点]

固有方程式 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を解くと，

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda-5) = 0\ .$$

よって，A の固有値は，$\lambda = -1, 5$.

$\lambda = -1$ のとき，

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + y = 0 \iff x = -y\ .$$

$y = c_1\ (\neq 0)$ とおくと，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 5$ のとき，

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\iff -2x + y = 0$

$\iff y = 2x$

$x = c_2\ (\neq 0)$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_2 \end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

固有値 $\boxed{-1}$ に対する固有ベクトル $\boxed{c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\ (c_1 \neq 0)}$

固有値 $\boxed{5}$ に対する固有ベクトル $\boxed{c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ (c_2 \neq 0)}$

問 3. 次の行列の固有値を求めよ．（固有ベクトルは求めなくてよい．） [6 点 × 3]

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 固有方程式 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ を解くと，

$$-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

$$\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2} ,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 固有方程式 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を解くと，

$$\begin{aligned} & (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 1 + 4 + (2-\lambda) - 2(4-\lambda) - 2(3-\lambda) = 0 \\ \iff & -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0 \\ \iff & -(\lambda-1)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0 \\ \iff & -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0 . \end{aligned}$$

$$\boxed{1 ,\ 3 ,\ 5}$$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ※ 対角行列の固有値は，対角成分．

$$\boxed{1 ,\ -2}$$

問 4. 2 つのベクトル $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，平行ではないが直交もしていない．$\vec{a}_1$ と直交するベクトルのうち，$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ で張られる平面内のベクトルの $\vec{b}_2$ を求めよ．ただし，$\vec{b}_2$ は

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1$$

で求められることを用いてよい． [10 点]

$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$, $|\vec{a}_1|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$ より，

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

問題は裏面にもあります．

問 5. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルは， [5 点 × 3]

固有値 1 に対する固有ベクトルは $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， 固有値 4 に対する固有ベクトルは $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，

である $(c_1, c_2 \neq 0)$．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 対角化行列 P を書け．

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) P^{-1} を求めよ．

$$P^{-1} = \frac{1}{-2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) (1) の対角化行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ．

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

問 6. 対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを証明せよ． [7 点]

（ヒント：対称行列 A の異なる固有値を λ, μ，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{x}$, $\vec{y}$ とせよ．）

対称行列 A の異なる固有値を λ, μ，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{x}$, $\vec{y}$ とすると，

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}\ , \quad A\vec{y} = \mu\vec{y}\ .$$

また，A は対称行列であるから，$A^{\mathsf{T}} = A$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) &= (\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = (A\vec{x}) \cdot \vec{y} = (A\vec{x})^{\mathsf{T}}\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\vec{y} \\ &= \vec{x}^{\mathsf{T}}A\vec{y} = \vec{x} \cdot (A\vec{y}) = \vec{x} \cdot (\mu\vec{y}) = \mu(\vec{x} \cdot \vec{y}) \\ \therefore \quad & (\lambda - \mu)(\vec{x} \cdot \vec{y}) = 0\ . \end{aligned}$$

仮定より $\lambda \neq \mu$ なので，$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$．

よって，対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する． ∎

問題は 2 枚目にもあります．

問 7. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルは， [(1) 15 点，(2) 8 点]

$$\text{固有値 } 1 \text{ に対する固有ベクトルは } c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{固有値 } 3 \text{ に対する固有ベクトルは } c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

である $(c_1, c_2 \neq 0)$．このとき，2 次形式 $2x^2 + 2xy + 2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 標準形 $\alpha x'^2 + \beta y'^2$ を求めよ．また，x', y' を x, y を用いて表せ．

大きさ 1 の固有ベクトルは，それぞれ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$．$T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ とおくと，$T^{-1} = T^{\mathsf{T}} = T$ で，A は

$$T^{\mathsf{T}} A T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

と対角化される．

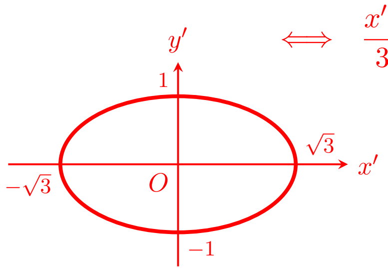
また，$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

標準形： $x'^2 + 3y'^2$

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

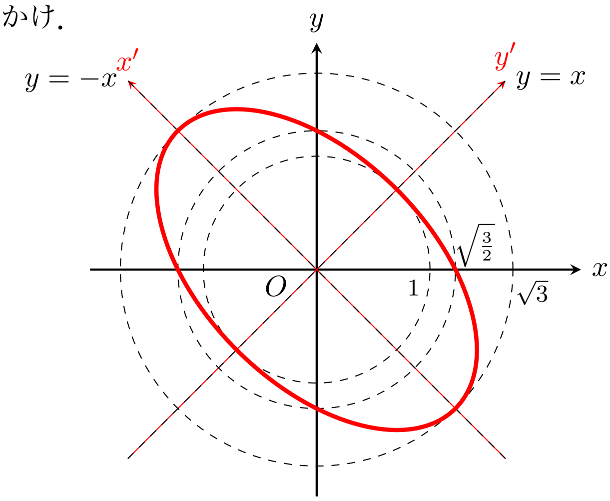
(2) 曲線 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ の概形を右下図中にかけ．

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3 \iff x'^2 + 3y'^2 = 3 \iff \frac{x'^2}{3} + y'^2 = 1$$



x' 軸 $\iff$ 直線 $y' = 0$ $\iff$ 直線 $y = -x$

y' 軸 $\iff$ 直線 $x' = 0$ $\iff$ 直線 $y = x$



問 8. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルは，

$$\text{固有値 } 2 \text{ に対する固有ベクトルは } c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{固有値 } 5 \text{ に対する固有ベクトルは } c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

である $(c_1, c_2 \neq 0)$．このとき，A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする． [10 点]

$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

よって，
$$A^n = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^n P^{-1}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n & 0 \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & 3 \cdot 5^n \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n & 0 \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & 3 \cdot 5^n \end{bmatrix}$$

問題は以上です．