2024年度　数学B　前期中間試験　（実施日：2024年5月31日）

得点	

3年___科　学籍番号：__________　氏名：__________

注意： 試験時間は **50分** です．問3以降は，最終的な答えがどこか分かるように解答すること．またそれに至る過程も採点対象です．採点者に伝わるように書いてください．この試験では，正方行列 A の行列式を $|A|$ で表します．　*** If you need English assistance, see the right half of page 2.**

問1．次の空欄 (a) から (c) に当てはまる語句・数式を解答欄に記せ．［3点 × 3］

(1) 行列式は，

- 1つの行〔または列〕の各成分が2数の和として表されているとき，この行列式は2つの行列式の和として表すことができる；
- 1つの行〔または列〕のすべてに共通な因数は，行列式の因数としてくくり出すことができる，

という性質をもつ．例えば2次の行列式では，

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などが成り立つ．このような性質を $\boxed{\text{(a)}}$（あるいは，多重 $\boxed{\text{(a)}}$）と呼ぶ．

(2) $1, 2, 3, 4$ を並べてできる順列について，その総数は $\boxed{\text{(b)}}$ である．それらはすべて，基本順列に「順列の中の2数を交換する」という操作を何回か施して得られ，その操作の回数の偶奇によって，偶順列と奇順列とに分類できる．例えば順列 $(2, 1, 3, 4)$ は，$\boxed{\text{(c)}}$ である．

(a)		(b)		(c)	

問2．次の (1) から (3) について，下線部が正しいものには◯を，誤っているものには正しい数式を，それぞれ解答欄に書け．ただし，A は n 次の正方行列を表すとする．　［3点 × 3］

(1) $|A^2| = \underline{|A|^2}$．

(2) c を定数とするとき，$|cA| = \underline{c|A|}$．

(3) $A^\top$ を A の転置行列とすると，$|A^\top| = \underline{|A|}$．

(1)		(2)		(3)	

問3．次の行列式の値を求めよ．　［(3) のみ10点，他 5点 × 3］

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

問4．次の行列式を計算せよ．ただし，(2) は因数分解した形で答えよ．［(1) 5点，(2) 10点］

(1) $\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$　　（e はネピアの数）

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

問5．次の方程式を解け．　［15点］

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 4 & 1-x & 1 \\ 4 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

問6．A が正則行列のとき，すなわち $|A| \neq 0$ のとき，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ であることを証明せよ．　［10点］

問題は裏面にもあります．

問 7. 三重対角行列とは,

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

のように，対角成分とそれに隣接する成分以外が 0 であるような正方行列のことをいう．ここでは，対角成分がすべて $2x$ でそれに隣接する成分が 1 の，n 次の三重対角行列の行列式：

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2x & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix},$$

について考えよう．

(1) 行列式 $U_1(x) = \begin{vmatrix} 2x \end{vmatrix}$，$U_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$，$U_3(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$

をそれぞれ求めよ． [7 点]

(2) (1) の結果から，等式 $U_3(x) = 2xU_2(x) - U_1(x)$ が成立することが分かる．同様に，$U_4(x)$ を計算によって求め，等式

$$U_4(x) = 2xU_3(x) - U_2(x)$$

も成立することを示せ． [10 点]

なお，$U_0(x) = 1$ とすると，一般に正の整数 n に対して，

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

が成り立つ．$U_n(x)$ は第 2 種チェビシェフ多項式と呼ばれ，詳しく調べられている．

問題は以上です．

※ English Assistance （不要な方は，無視してください．）

NOTES:

This exam is **<u>50 minutes</u>** long. In Question 3–7, make sure that the marker can tell where your final results are. It is important to write down the processes of how you get the final results, because they are also to be evaluated (descriptive type exam).

In this exam, $|A|$ denotes the determinant of a square matrix A.

*** You can answer the questions either in English or in Japanese.**

問 1. Fill in the blanks (a)–(c).

(1) The determinant has the following property:
- If each component of one row [or column] is written as an addition of two numbers, then the determinant is expressed by the addition of two determinants;
- If all components in one row [or column] are multiplied by the same number, then the number can be factored out of the determinant.

For the case of 2×2 matrices,

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \textit{etc.}$$

This property is referred to as $\boxed{\text{(a)}}$ (or multi-$\boxed{\text{(a)}}$).

(2) Let us consider the permutation of four numbers: $1, 2, 3, 4$. The total number of the permutations is $\boxed{\text{(b)}}$. They can be obtained from the identity permutation *by several transpositions of any two numbers of the permutation.* Depending on the parity of the number of transpositions, one can classify permutations into two: the even permutations or the odd permutations. For example, the permutation $(2, 1, 3, 4)$ is an $\boxed{\text{(c)}}$.

問 2. Read the following statements (1)–(3). Write ◯ in the space provided if the <u>underlined part</u> is correct. If not, write down the correct answer. Here, A denotes an $n \times n$ matrix.

(1) $|A^2| = \underline{|A|^2}$.

(2) For a constant c, $|cA| = \underline{c|A|}$.

(3) A^T denotes the transposed matrix of A. Then $|A^\mathsf{T}| = \underline{|A|}$.

問 3. Compute the following determinants.

問 4. Compute the following determinants.

(1) (e is the Napier's constant, which is also known as the Euler's number.)

(2) Write your answer in the factorized form.

問 5. Find the roots of the following equation.

問 6. For a regular matrix A, that is $|A| \neq 0$, prove that $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

問 7. A tridiagonal matrix is a square matrix whose diagonal components and the ones next to them are nonzero, while the other components are 0:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Let us consider the determinats of tridiagonal matrices of order n where all the diagonal components are $2x$ and the ones next to them are 1:

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2x & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

(1) Compute the determinants $U_1(x) = \begin{vmatrix} 2x \end{vmatrix}$, $U_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$, and $U_3(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$.

(2) From (1), one can see that $U_3(x) = 2xU_2(x) - U_1(x)$. Now, compute $U_4(x)$, and show that

$$U_4(x) = 2xU_3(x) - U_2(x) \ .$$

Note that by choosing $U_0(x) = 1$, the following recurrence relation:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \ ,$$

holds for any positive integer n. The polynomials $U_n(x)$ is well-known as the *Tchebyshev polynomials of the second kind.*