2024年度　数学B　後期中間試験

（実施日：2024年11月25日）

得点	100

3年＿＿科　整理番号：＿＿＿　学籍番号：＿＿＿＿＿　氏名：解答例

注意： 試験時間は **50分** です．問題用紙は **2枚** あります．両方ともに記名してください．解答欄があるものは，欄内に最終的な答えを書いてください．また，最終的な答えに至る過程も採点対象なので，必要に応じて，与えられた余白に計算式や考え方などを，採点者に伝わるように書いてください．

*** If you need English assistance, see page 6.**

問1. 次の空欄に当てはまる式を書け． [3点]

f が線型変換であるとき，任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ と実数 k に対して，

(i)　$f(\vec{x}+\vec{y}) = \boxed{f(\vec{x}) + f(\vec{y})}$

(ii)　$f(k\vec{x}) = \boxed{kf(\vec{x})}$

が成り立つ．

問2. 次のうち，線型変換であるものを選び，その変換を表す行列を求めよ．ただし，点 P は座標平面上の点とする．（線型変換でないものの解答欄は，空欄のままにすること．） [計16点]

(1) 点 P を y 軸に関して線対称である点 P' に移す変換.　$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ ・・・ 線型変換

(2) 点 P を直線 $y = x$ に関して線対称である点 P' に移す変換.　$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ ・・・ 線型変換

(3) 点 P を原点 O のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転して得られる点 P' に移す変換.　$R_{-\frac{\pi}{3}}$ ・・・ 線型変換

(4) 点 P を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動した点 P' に移す変換.

$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$ ・・・ 線型変換でない

(5) 点 $P(x, y)$ を $\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$ で表される点 $P'(x', y')$ に移す変換.　・・・ 線型変換でない

(6) 点 P をそれ自身に対応させる変換.　(恒等変換) ・・・ 線型変換

(1)	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(2)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	(3)	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	(4)	
(5)		(6)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				

問 3.　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とするとき，次の問いに答えよ．　[3 点 × 2]

(1) 点 $P(3,1)$ の f による像 $P' = f(P)$ の座標を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\boxed{(4, 11)}$

(2) f によって点 $Q'(1,-1)$ に移されるもとの点 Q の座標を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{(2, -1)}$

問 4.　行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ f, g とするとき，次の変換を表す行列を求めよ．　[4 点 × 5]

(1) f^{-1}　　(2) $g \circ f$　　(3) $(g \circ f)^{-1}$　　(4) $f \circ g$　　(5) $f \circ f$

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

(1)	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(2)	$\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$	(3)	$-\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	(4)	$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$	(5)	$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

問 5.　行列 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ で表される線型変換 f について，

(1) 点 $P(1,2)$ の f による像 P'

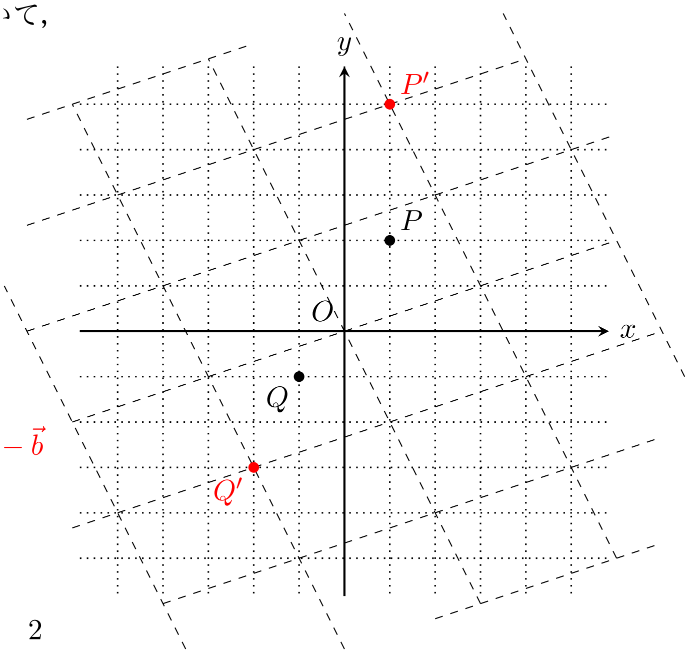
(2) 点 $Q(-1,-1)$ の f による像 Q'

を右図中に図示せよ．　[3 点 × 2]

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とすると，

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \vec{a} + 2\vec{b}\,,\quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -\vec{a} - \vec{b}$$

であるから，右図を得る．



問 6. 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とするとき，次の問いに答えよ． [3 点 × 2]

(1) ベクトル $\vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の f による像 $\vec{p}\,' = f(\vec{p})$ を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}$

(2) ベクトル $\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の f による像 $\vec{q}\,' = f(\vec{q})$ を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}$

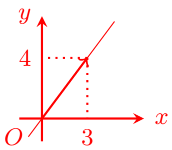
問 7. ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に移す線型変換 f について，ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ の f による像を求めよ． [4 点]

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}$

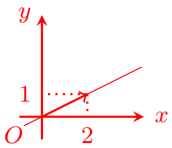
問 8. 行列 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換 f について，次の問いに答えよ． [4 点 × 4]

(1) f によって x 軸はどのような図形に移されるか．



$\boxed{\text{直線 } y = \frac{4}{3}x}$

(2) f によって y 軸はどのような図形に移されるか．



$\boxed{\text{直線 } y = \frac{1}{2}x}$

(3) f によって直線 $y = -x + 1$ はどのような図形に移されるか．

求める図形上の点を (x', y') とおく．

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ 3x+1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = 3x+1 \end{cases}$$

x を消去して，$3x' - y' = 5$． よって，求める図形は $\boxed{\text{直線 } 3x - y = 5}$

(4) f によって 3 直線で囲まれる図形の面積は何倍になるか．

$$\left|\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right| = |3-8| = 5$$

$\boxed{5 \text{ 倍}}$

問題は 2 枚目にもあります．

（ 計 算 用 ）

※ 計算用のページは，**採点対象外**です．

3 年＿＿科　整理番号：＿＿＿　学籍番号：＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 9. $A = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{11} & -\sin\dfrac{\pi}{11} \\ \sin\dfrac{\pi}{11} & \cos\dfrac{\pi}{11} \end{bmatrix}$ とするとき，A^{2024} を計算せよ． [5 点]

$$A^{2024} = \begin{bmatrix} \cos\left(2024 \cdot \dfrac{\pi}{11}\right) & -\sin\left(2024 \cdot \dfrac{\pi}{11}\right) \\ \sin\left(2024 \cdot \dfrac{\pi}{11}\right) & \cos\left(2024 \cdot \dfrac{\pi}{11}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 184\pi & -\sin 184\pi \\ \sin 184\pi & \cos 184\pi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

問 10. 行列 $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ （α は定数）が直交行列であることを確かめよ． [6 点]

$\vec{a} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ とおく．

$|\vec{a}| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = 1$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(-\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = 1$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$.

よって，$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ は直交行列である． //

問 11. 次の問いに答えよ． [3 点 × 4]

(1) ベクトル $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 P を求めよ．

$P = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}$

(2) P^{-1} を計算せよ．

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ のとき，$B = P^{-1}AP$ を計算せよ．

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}}$

(4) (3) のとき，$\det A = \det B$ であることを確かめよ．

$\det A = 15 - 2 = 13$

$\det B = -20 + 33 = 13$　　$\therefore\ \det A = \det B$ //

（別解）　$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \dfrac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P = \det A$ //

問題は以上です．

※ English Assistance　（不要な方は，無視してください.）

NOTES:

This exam is **50 minutes** long. You have **two exam papers**. Write down your name on both of them. Your answers should be written in □, if provided. It is important to write down the processes of how you get the final results, because they are also to be evaluated.

*** You can answer the questions either in English or in Japanese.**

問 1. Fill in the blanks.

Let f be a linear transformation. For arbitrary vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$ and an arbitrary real number k, the following two relations hold:

(i) $f(\vec{x}+\vec{y}) = \boxed{}$

(ii) $f(k\vec{x}) = \boxed{}$

問 2. Which ones are linear transformations? Write the matrices representing the linear transformations in □. (For those which are not linear transformations, leave □ blank.)

(1) The transformation that maps any point P on a plane to another point P', which is symmetric about the y-axis.

(2) The transformation that maps any point P on a plane to another point P', which is symmetric about the line $y = x$.

(3) The transformation that rotates any point P on a plane around the origin O by $-\dfrac{\pi}{3}$.

(4) The transformation that translates any point P on a plane by p in x-direction and by q in y-direction.

(5) The transformation that maps any point $P(x, y)$ to another point $P'(x', y')$ with $\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$.

(6) The transformation that maps any point P on a plane to itself.

問 3. Let f be a linear transformation represented by a matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(1) Find the coordinates of the image of the point $P(3, 1)$ by f, $P' = f(P)$.

(2) Find the coordinates of the point Q, which is transformed to the point $Q'(1, -1)$ by f.

問 4. Let f, g be linear transformations represented by matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ respectively. Find the matrices that represents the following transformations:

(1) f^{-1} (2) $g \circ f$ (3) $(g \circ f)^{-1}$ (4) $f \circ g$ (5) $f \circ f$

問 5. Let f be a linear transformation represented by a matrix $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Plot the following points in the figure provided.

(1) The image of the point $P(1, 2)$ by f, $P' = f(P)$.

(2) The image of the point $Q(-1, -1)$by f, $Q' = f(Q)$.

問 6. Let f be a linear transformation represented by a matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

(1) Find the image of the vector $\vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ by f, $\vec{p}\,' = f(\vec{p})$.

(2) Find the image of the vector $\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ by f, $\vec{q}\,' = f(\vec{q})$.

問 7. Suppose a linear transformation f transforms $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectively. Find the image of the vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ by f.

問 8. Let f be a linear transformation represented by a matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) What does the x-axis transforms to by f?

(2) What does the y-axis transforms to by f?

(3) What does the line $y = -x + 1$ transforms to by f?

(4) How many times does the area surrounded by three lines get larger under f?

問 9. For $A = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{11} & -\sin\dfrac{\pi}{11} \\ \sin\dfrac{\pi}{11} & \cos\dfrac{\pi}{11} \end{bmatrix}$, evaluate A^{2024}.

問 10. Show that the matrix $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ is an orthogonal matrix. (α is a constant.)

問 11. Answer the following questions.

(1) What matrix P transforms $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ to $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ respectively?

(2) Find P^{-1}.

(3) Suppose $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Find $B = P^{-1}AP$.

(4) For the matrices A and B in (3), show that $\det A = \det B$.

（ 計　算　用 ）

※　計算用のページは，**採点対象外**です．

（ 計　算　用 ）

※　計算用のページは，**採点対象外**です．

自由記述欄（感想や要望など，奈須田に伝えたいことがある方はどうぞ）