微分法を通して，虹をみる — Rainbows through Calculus Glasses —

（なすだ ゆうた）

0　イントロダクション

以前，群馬高専の公式 X（みなさんフォローしてますか？）に，このような投稿がありました：

虹が二重に架かっているのが見えますか？

右側の明るい虹を「主虹（しゅこう）」，左側の暗い虹を「副虹（ふくこう）」といいます（その間の暗い部分は，「Alexander（アレキサンダー）の暗帯」と呼ばれています）．

虹は眺めているだけでも十分美しく，神秘的なものでさえあります．しかし，皆さんはせっかく理系に進んだので，虹という現象を数学という道具を通して“みる”＝解析する，ということをやってみても面白いと思います．虹の“みえ方”が変わるかもしれません．——前期の数学 A の総まとめとして，虹という現象を微分法を用いて解析してみましょう．

「虹はどの向きにできるのか？」というのが，当面の問いです．

1　光の反射・屈折・分散（復習）

- **反射の法則**　入射角と反射角は等しい．
- **屈折の法則（Snell（スネル）の法則）**　$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.
- **光の分散**　光の屈折の向きは波長（色）によって異なる．そのため，複数の波長成分を含む光が屈折すると，光は波長成分ごとに分離される．ちなみに可視光では，
  - 赤に近いほど，屈折率は小さく，あまり屈折しない；
  - 紫に近いほど，屈折率は大きく，よく屈折する．

2　虹の発生

虹は，大気中の（数多くの）水滴の中で太陽光が屈折・反射することで生じる．

大気中の水滴に入射した太陽光は屈折し，さらに水滴内部で複数回反射し，出射時に再び屈折することで大気中へと散乱する．

水滴に入射することなく表面で反射される光を，１次散乱光という．反射では分散は起きない．

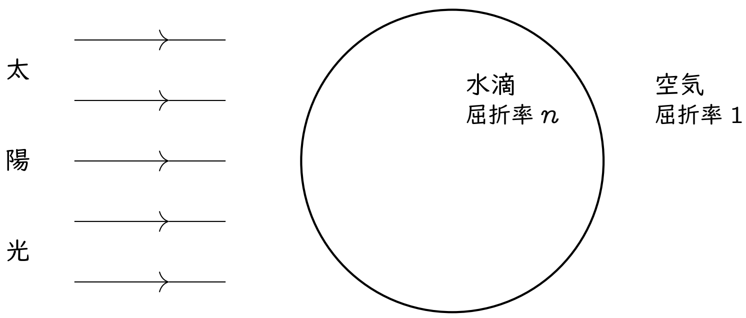
水滴に入射し，内部で１度も反射することなく大気中へと出てくる光は，２次散乱光と呼ばれる．これは，２度の屈折で太陽光は分散されるが，太陽光とほぼ同じ向きの光で，太陽が眩しいために観測できない．

３次散乱光は，水滴内部で１回反射されて大気中へと出てくる光で，これが主虹を形成する．４次散乱光は，水滴内部で２回反射されて大気中へと出てくる光で，副虹を形成する．

2.1　問題設定

ここでは，簡単のため（for simplicity），水滴は球，空気の屈折率は１として考える．また，水の屈折率を n とする．

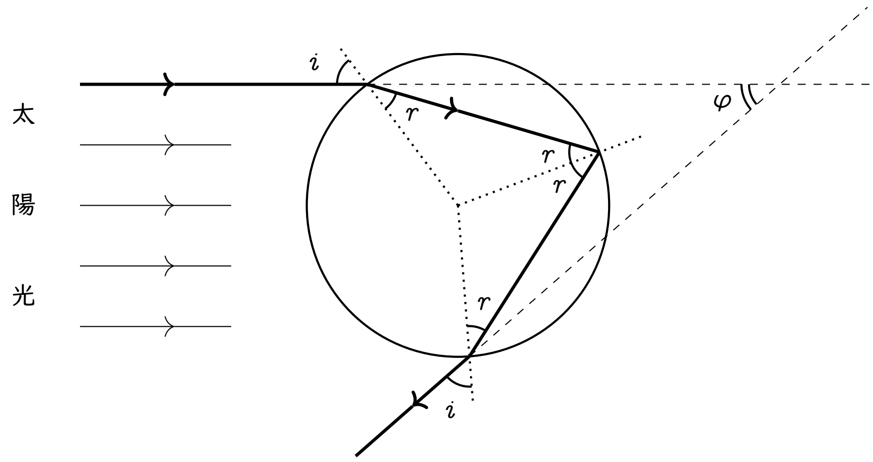
＊ 屈折率 n は，光の波長 λ に依存する．



2.2　主虹（3 次散乱光）

太陽光の入射角を i，屈折角を r とする．

3 次散乱光の経路を，以下に図示する．なお図中の φ は，散乱補角と呼ばれる．



Snell の法則より，

$$\sin i = n \sin r$$

が成り立つ．さらに，3 つの角度 i，r，φ の間には

$$\varphi = \pi - \Big((i-r) + (\pi - 2r) + (i - r)\Big) \qquad \therefore \quad \varphi = 4r - 2i$$

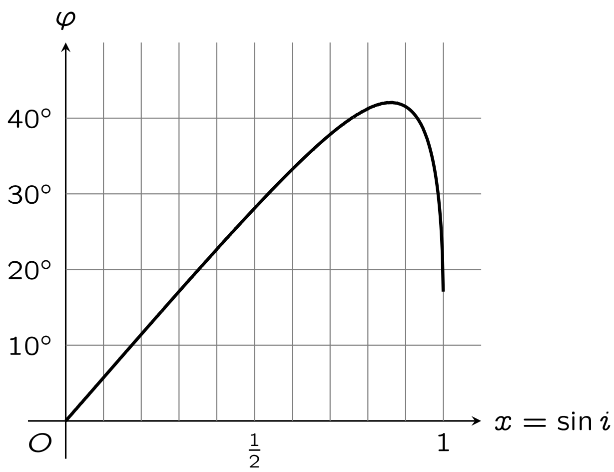
という関係が成り立っている．

以上の 2 式から r を消去して，$\sin i = x$ とおくと，

$$\varphi = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right) - 2i = 4\arcsin\left(\frac{x}{n}\right) - 2\arcsin x$$

が得られる．ただし，入射角 i が負のとき，3 次散乱光は地上を向かないので，$0 \leqslant i \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ つまり $0 \leqslant x \leqslant 1$ のときを考えれば十分である．

適当な n に対して，φ-x グラフを描いてみると（コンピュータを用いた），以下のようになる．



これは，等間隔の一様な太陽光の入射に対して，（ある波長成分の）３次散乱光の向きは等間隔でなくなっていることを表している．３次散乱光は，およそ φ の極大値の向きによく散乱される（それ以外の向きにも散乱されるが，そのような光は非常に弱く，観測しづらい）．

では，φ の極大値 φ_{max} を，計算によって求めてみよう．φ が極大値をとるとき，$\dfrac{d\varphi}{dx} = 0$ であるから，まず φ を x で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[4\arcsin\left(\frac{x}{n}\right) - 2\arcsin x\right] \\ &= \frac{4}{n\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{n^2-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

が得られる．これが 0 となるのは，

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{n^2-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{n^2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{n^2-x^2} = 2\sqrt{1-x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad n^2 - x^2 = 4(1-x^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad 3x^2 = 4 - n^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\end{aligned}$$

のときである．このときの φ の値（つまり極大値）φ_{max} は，

$$\varphi_{\mathrm{max}} = 4\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right)$$

と求まる（単位は rad（ラジアン）であることに注意）．

具体的に，数値を代入してみよう．理科年表 [3] によると，波長 λ ごとの水 (20 °C) の屈折率 n は，次のようになる：

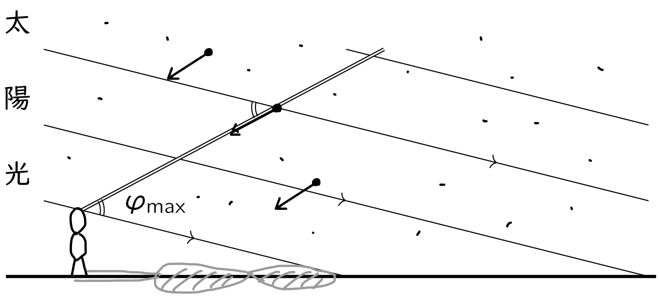
波長 λ/nm	色	屈折率 n
656.3	■	1.3311
589.3	■	1.3330
546.1	■	1.3345
404.7	■	1.3428

よって，φ_{max} をそれぞれ計算すると，次のようになる：

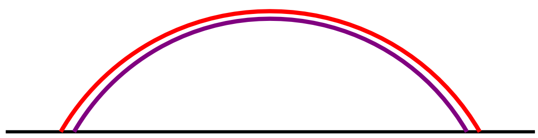
波長 λ/nm	色	屈折率 n	φ_{max} [deg]
656.3	■	1.3311	42.3552
589.3	■	1.3330	42.0781
546.1	■	1.3345	41.8605
404.7	■	1.3428	40.6741

φ_{max} の具体的な値が求まったところで，φ_{max} の意味を再度確認してみよう．φ は３次散乱光の散乱補角を表し，φ_{max} は特定の波長成分の３次散乱光がよく散乱される向きを表すのであった．地上で虹を観測する我々にとって，この量はどのような意味をもつのだろうか．

以下の図に示すように，観測者の後ろから太陽光が差し込んできており，観測者の前の大気中には大量の水滴が存在している状況を考える．(ちなみに，このときの観測者の影は，図のようになることはわかりますか？）水滴に入射してきた太陽光は，入射してきた向きから φ_{max} だけ曲がった向きに特定の波長の光が散乱されるのだから，その散乱光が観測者の目に入るのは，水滴が下図の二重線上にある場合に限られる．つまり観測者にとって，太陽光線から φ_{max} だけ見上げた向きにある水滴に特定の色が付いて見える，ということである．

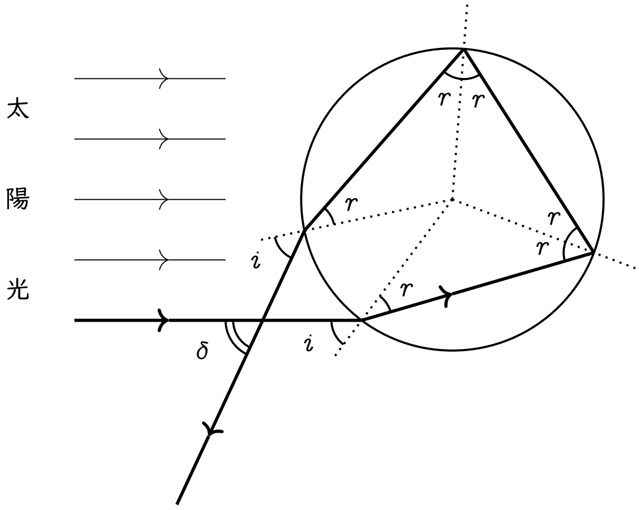


上図の観測者が観測する虹の模式図を，以下に示す：



2.3　副虹（4 次散乱光）

副虹の場合も，同様に考えていく．4 次散乱光の散乱補角を δ と書く．



Snell の法則より，

$$\sin i = n \sin r$$

が成り立つ．さらに，3 つの角度 i, r, δ の間には

$$\delta = \Big((i - r) + (\pi - 2r) + (\pi - 2r) + (i - r)\Big) - \pi \qquad \therefore \quad \delta = 2i - 6r + \pi$$

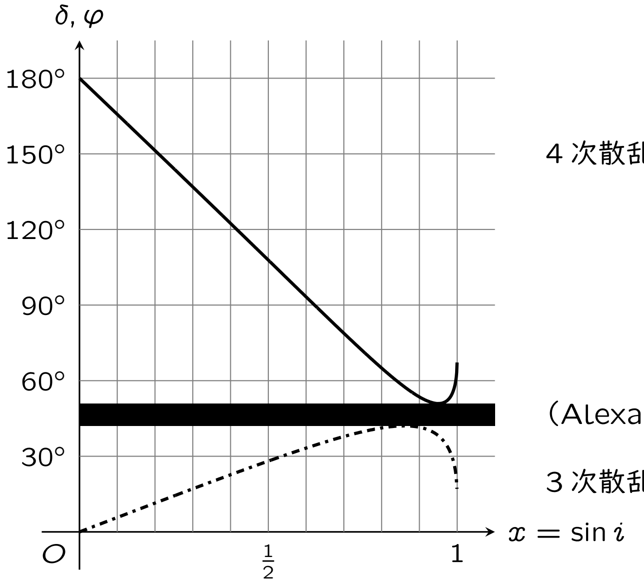
という関係が成り立っている．

以上の 2 式から r を消去して，$\sin i = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$ とおくと，

$$\delta = 2i - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right) + \pi = 2 \arcsin x - 6 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + \pi$$

が得られる．

適当な n に対して，δ-x グラフを描いてみると（コンピュータを用いた），以下のようになる．ただし，比較のために，3 次散乱光の散乱補角 φ のグラフも 1 点鎖線で描画した．



4 次散乱光も 3 次散乱光と同様に，等間隔の一様な太陽光の入射に対して，出射の向きは等間隔でなくなっている．4 次散乱光は，およそ δ の極小値の向きによく散乱される．

また，3 次散乱光も 4 次散乱光も散乱しない領域が存在する．この領域は，他の領域と比べて極端に暗くなる．これを Alexander の暗帯と呼ぶ．

話を元に戻して，δ の極小値 δ_{min} を計算によって求めてみよう．δ が極小値をとるとき，$\dfrac{d\delta}{dx} = 0$ であるから，まず δ を x で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[2\arcsin x - 6\arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + \pi\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{n\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{\sqrt{n^2-x^2}}\end{aligned}$$

が得られる．これが 0 となるのは，

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{\sqrt{n^2-x^2}} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{6}{\sqrt{n^2-x^2}} \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\sqrt{1-x^2} = \sqrt{n^2-x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad 9(1-x^2) = n^2 - x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 8x^2 = 9 - n^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\end{aligned}$$

のときである．このときの δ の値（つまり極小値）$\delta_{\min}$ は，

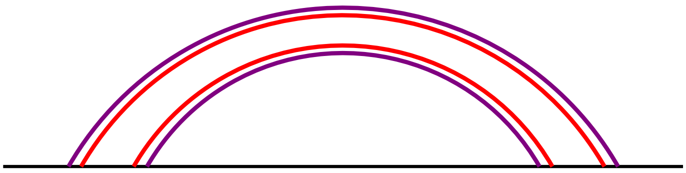
$$\delta_{\min} = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\right) - 6\arcsin\left(\sqrt{\frac{9-n^2}{8n^2}}\right) + \pi$$

と求まる（単位は rad（ラジアン）であることに注意）．

具体的に，数値を代入してみよう．主虹の場合と同様に，各 n ごとに $\delta_{\min}$ をそれぞれ計算すると，次のようになる：

波長 λ/nm	色	屈折率 n	$\varphi_{\max}$ [deg]	$\delta_{\min}$ [deg]
656.3		1.3311	42.3552	50.3915
589.3		1.3330	42.0781	50.8908
546.1		1.3345	41.8605	51.2832
404.7		1.3428	40.6741	53.4267

また，観測者が観測する虹は，以下のようになる（副虹の色の並び順は，主虹のそれとは逆になっている）：



なお副虹は，主虹と比べて非常に暗い（しばしば見逃される）．それは，3 次散乱までで入射光のエネルギーの大部分を散乱しており，残されたエネルギーは 3 次散乱光のエネルギーと比べて非常に小さいため，4 次散乱光は 3 次散乱光よりかなり弱くなる．

参考文献等

1 MIT OpenCourseWare 8.03 (Prof. Walter Lewin) — Lect. 22 — Rainbows, Coronae, Glories, Glass Bow, Great Demos. URL: https://www.youtube.com/watch?v=aF6auqBCPnY&list=PLyQSN7X0ro22WeXM2QCKJm2NP_xHpGV89&index=23

2 James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th Edition, Thomson (2008).

3 国立天文台 編，理科年表 2023，丸善出版 (2022).